Olympiades Nationales de Mathématiques 2017

Sélections régionales
2ème tour

Niveau 7C

26 février 2017
Durée 3 h

Solution

proposée par AMIMATHS

L'épreuve est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée ;
Les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée.

Exercice 1 (4 points)

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $f(x)=a-\sqrt{x+b}$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tels que la fonction f vérifie à la fois $f(u)=v$ et $f(v)=u$.

1) Montrer que **2** et **3** sont échangeables.
2) Peut-on en dire autant de **4** et **7** ?
3) A quelle condition deux entiers **n** et **m** sont-ils échangeables ?

Solution de l'exercice 1 (4 points)

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $f(x)=a-\sqrt{x+b}$

Deux nombres réels u et v distincts sont dits échangeables s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tels que la fonction f vérifie à la fois $f(u)=v$ et $f(v)=u$.

1) Montrer que **2** et **3** sont échangeables.

On a $\begin{cases} a-\sqrt{2+b}=3 \\ a-\sqrt{3+b}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-3=\sqrt{2+b} \\ a-2=\sqrt{3+b} \end{cases}$ donc il suffit de prendre $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$ d'où $f(x)=3-\sqrt{x-2}$

2) Peut-on en dire autant de **4** et **7** ?

On a $\begin{cases} a-\sqrt{n+b}=m \\ a-\sqrt{m+b}=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-7=\sqrt{4+b} \\ a-4=\sqrt{7+b} \end{cases}$ d'où $(a-7)^2-(a-4)^2=\sqrt{4+b}^2-\sqrt{7+b}^2$ c'est-à-dire $a=6$ d'où

$\begin{cases} a=6 \\ a-7=\sqrt{4+b} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{4+b}=-1$ ce qui est impossible, on en déduit que **4** et **7** ne sont échangeables.

3) A quelle condition deux entiers **n** et **m** sont-ils échangeables ?

Soients m et n deux entiers tels que $n<m$

On a $\begin{cases} a-\sqrt{4+b}=7 \\ a-\sqrt{7+b}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-m=\sqrt{n+b} \\ a-n=\sqrt{m+b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-m)^2=n+b \\ (a-n)^2=m+b \\ a\geq n \text{ et } a\geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-m)^2=n+b \\ (a-m)^2-(a-n)^2=n-m \\ a\geq m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=(a-m)^2-n \\ (n-m)(2a-m-n)=n-m \\ a\geq m \end{cases} \qquad \text{Or } m\neq n$$

d'où $\begin{cases} b=(a-m)^2-n \\ (n-m)(2a-m-n)=n-m \\ a\geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{m+n+1}{2} \\ b=(a-m)^2-n \\ \dfrac{m+n+1}{2}\geq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{m+n+1}{2} \\ b=(a-m)^2-n \\ n+1\geq m \end{cases}$ or $\mathbf{n<m}$ donc $\mathbf{m=n+1}$

En conclusion deux entiers **n** et **m** sont-ils échangeables si, et seulement si ils sont consécutifs d'où

$$\mathbf{f(x)=n+1-\sqrt{x-n}}$$

Exercice 2 (4 points)

Dans un livre, les pages sont numérotées de **1** à **n**, et de gauche à droite. La page numérotée 1 est une page de gauche. On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à **2017**. Mais une feuille du livre a été perdue et les numéros des ses pages n'ont pas été comptés.
Quel est le nombre de pages du livre et les numéros des pages de la feuille perdue ?

Solution de l'exercice 2

Soit n le nombre de pages du livre. Le numérotage des pages étant de gauche à droite et la page **1** étant une page de gauche, nous pouvons remarquer que les pages de la feuille déchirée sont une page de numéro impair **2p-1** et une page de numéro pair **2p** .

Donc la somme de tous les nombres de 1 à n, hormis **2p-1** et **2p** , est égale à **2017**, soit :

$$\frac{n(n+1)}{2}-(4p-1)=2017 \qquad (1).$$

Or $2\leq 2p\leq n$ d'où $1\leq 2p-1\leq n-1$ ainsi $3\leq 4p-1\leq 2n-1$ donc $-2n+1\leq -(4p-1)\leq -3$

On en déduit que $\dfrac{n(n+1)}{2}-2n+1\leq \dfrac{n(n+1)}{2}-(4p-1)\leq \dfrac{n(n+1)}{2}-3$

Et donc $\dfrac{n^2-3n+2}{2}\leq 2017\leq \dfrac{n^2+n-6}{2}$.

double inégalité qui conduit aux deux inéquations $\begin{cases} n^2-3n-4032\leq 0 \\ n^2+n-4040\geq 0 \end{cases}$

La première inégalité donne $n\leq \dfrac{3+\sqrt{16137}}{2}$ d'où $n\leq 65{,}01$ et la deuxième inégalité donne

$n\geq \dfrac{-1+\sqrt{16161}}{2}$ d'où $n\geq 63{,}06$. On a finalement $63{,}06\leq n\leq 65{,}01$ or $n\in\mathbb{N}^*$ d'où **n** est soit égale à **64** ou à **65**

De l'égalité (1) on a $2p=\dfrac{n(n+1)}{4}-1008$

Si $n=64$ alors $2p=32$ c'est-à-dire que les pages de la feuille déchirée sont **31** et **32**.

Si $n=65$ alors $2p=64{,}5$ ce qui est impossible.

En conclusion

Le nombre de pages du livre est de **64** et les pages de la feuille déchirée sont **31** et **32**.

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle direct. On considère les points P, Q et R tels que : $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. On note I le point d'intersection de (AP) et (CR), J le point d'intersection de (AP) et (BQ) et K celui de (BQ) et (CR).

1.a) Exprimer I, J et K comme barycentre de A, B et C.

b) Montrer que : I est le milieu de $[CK]$, J est le milieu de $[AI]$ et K est le milieu de $[BJ]$

2.a) Montrer qu'une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire.

b) Exprimer l'aire de IJK en fonction de l'aire de ABC.

Solution de l'exercice 3 :

1° a) D'après les hypothèses on a $P=\text{bar}\{(B,1),(C,2)\}$;
$Q=\text{bar}\{(A,2),(C,1)\}$ et $R=\text{bar}\{(A,1),(B,2)\}$.

Chaque point du plan est un barycentre des points A,B et C. On pose : $I=\text{bar}\{(A,a)(B,b),(C,c)\}$ alors
$I=\text{bar}\{(A,a),(P,b+c)\}$, associativité du barycentre. Donc $c=2b$. De même $I=\text{bar}\{(C,c),(R,a+b)\}$, donc $b=2a$. On trouve que $b=2a$, $c=4a$ et $a\neq 0$.

Soit $I=\text{bar}\{(A,1)(B,2),(C,4)\}$

De la même façon on montre que $J=\text{bar}\{(A,4)(B,1),(C,2)\}$ et $K=\text{bar}\{(A,2)(B,4),(C,1)\}$.

b) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{7}\left(2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{7}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$ donc $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AJ}$ c'est-à-dire que $J=A*I$. On vérifie de la même façon que $K=B*J$ et $I=C*K$.

2° a) Soit EFG un triangle, $L=F*G$ et soit H le pied de la hauteur issue de E. Les triangles EFL et ELG ont la même hauteur EH et pour bases relatives FL et LG. Comme $FL=LG$ alors les deux triangles EFL et ELG sont de même aire. La médiane (EL) partage le triangle EFG en deux triangles EFL et ELG de même aire.

b) Les droites $(AK),(BI)$ et (CJ) sont respectivement des médianes dans les triangles ABJ, BCK et CAI. La droite (KJ) est une médiane dans le triangle AIJ D'après la question 2° a) les triangles $ABK, AKJ, BCI, BIK, CAJ, CJI$ et IJK sont tous de même aire et forment une partition de ABC. Donc l'aire de IJK est égale à un septième de l'aire de ABC.

Exercice 4 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ et soit (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f.
2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n en fonction de n.

Solution Exercice 4

1° $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$, $f''(x)=\frac{-2}{(x+2)^3}$ et $f'''(x)=\frac{6}{(x+2)^4}$.

2° Les premières dérivées suggèrent la forme : $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+2)^{n+1}}$.

A démontrer par récurrence :

Pour n = 1, la première dérivée vérifie la forme : $\mathbf{f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}}$.

Supposons que la formule est vraie pour n : $\mathbf{f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+2)^{n+1}}}$.

Démontrons ons qu'elle est vraie pour $\mathbf{n+1}$:

$$\mathbf{f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}n!\frac{-(n+1)(x+2)^n}{(x+2)^{2n+2}}=\frac{(-1)^{n+2}(n+1)!}{(x+2)^{n+2}}}.$$

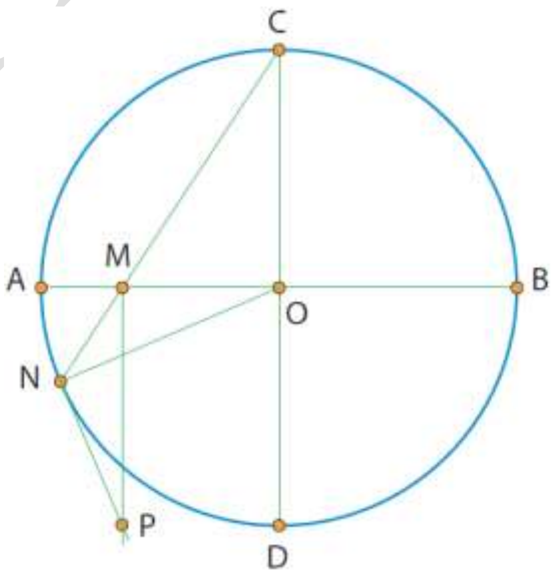
Enfin, on peut affirmer que : $\mathbf{f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}n!}{(x+2)^{n+1}}}$ pour $\mathbf{n\geq 1}$.

Exercice 5 (4 points)

On donne un cercle de centre **O** et deux diamètres perpendiculaires $[\mathbf{AB}]$ et **[CD]**. **M** étant un point du segment $[\mathbf{AB}]$, on trace $(\mathbf{CM})$, qui recoupe le cercle en **N**. La tangente en **N** au cercle et la perpendiculaire en **M** à $(\mathbf{AB})$ se coupent en **P**.

Montrer que **OP = CM**.

Solution de l'exercice 5



Les points **O**, **M**, **N**, **P** sont cocycliques. Cela résulte du fait que les angles **OMP** et **ONP** sont droits, les points **M** et **N** sont donc situés sur le cercle de diamètre **OP**.

Le quadrilatère **OMNP** étant inscriptible, on a : **NOP = NMP** comme angles inscrits qui interceptent le même arc **NP**. Or, **NMP = NCD** comme angles correspondants et **NCD = NCO = ONC** (triangle **OCN** isocèle en **O**) donc : **NOP = ONC**.

Ces angles occupent la position d'alternes internes relativement aux droites **(CN)** et **(OP)** coupées par la sécante **(ON)**, le parallélisme de **(CM)** et **(OP)** en découle. **(CO)** et **(MP)** d'une part et **(CM)** et **(OP)** d'autre part étant parallèles, le quadrilatère **OCMP** est un parallélogramme donc **OP = CM**.

Fin.