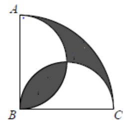
Olympiades Nationales de Mathématiques 2019 Final Niveau 7C

Correction Proposée par AMIMATHS

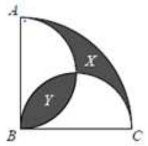
Exercice 1 : (20 points)

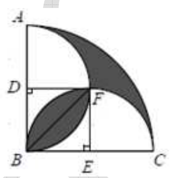
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle isocèle avec $BA = BC = a$.
Calculer l'aire grisée.



Solution

On note X l'aire de la partie hachurée située hors des deux demi-cercles et Y celle située dans les deux demi-cercles. On note S_1 l'aire du demi-cercle de diamètre $[BC]$ et S_2 celle du quart de cercle de centre B et de rayon BC. On a donc :





$S_2 = \frac{1}{4}\pi \times a^2$; $S_1 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{8}\pi$

$X = S_2 - 2S_1 + Y = \frac{a^2}{4}\pi - 2\times\frac{a^2}{8}\pi + Y$ Donc $\boxed{X = Y}$

Soit D et E les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$ et F le point tel que BEFD soit un carré.

E et D sont respectivement les centres des cercles de diamètres $[BC]$ et $[AB]$ de rayon $\frac{a}{2}$. Or $FE = FD = \frac{a}{2}$ donc F est le point commun de ces deux demi-cercles autre que B.

La diagonale $[BF]$ partage l'aire Y en deux parties d'aire $\frac{Y}{2}$ égale à l'aire du quart de cercle de centre E et de rayon $\frac{a}{2}$ diminuée de l'aire du triangle BEF : $\frac{Y}{2} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{1}{2}\times\frac{a}{2}\times\frac{a}{2} = \frac{\pi a^2}{16} - \frac{a^2}{8}$ donc $Y = \frac{a^2(\pi - 2)}{8}$

Finalement l'aire hachurée est égale à $X + Y = 2Y = \frac{a^2(\pi-2)}{4}$

Barème :	
Aire du quart du cercle	2
Aire de 2 demi cercles	2
Répartition X et Y	6
Calcul de X et Y	7
Présentation et idées	3

Exercice 2 ; (20 points)

Soit un entier $n \geq 2$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 2$; le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est impair et non premier.

2) Si $n = 3$, déterminez toutes les valeurs entières de m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

3) Montrez que pour n'importe quel entier n, il y a toujours un nombre fini de valeurs entières m pour lesquelles $m^2 + n^2 + 1$ est divisible par $m - n + 1$ et par $m + n + 1$.

Solution

1) On distingue deux cas :

- si $n \equiv 0[2]$, alors $n^4 \equiv n^2 \equiv 0[2] \Rightarrow n^4 + n^2 + 1 \equiv 1[2]$

Ce qui veut dire que le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est impair.

- si $n \equiv 1[2]$, alors $n^4 \equiv n^2 \equiv 1[2]$ et $n^4 + n^2 \equiv 0[2]$

$\Rightarrow n^4 + n^2 + 1 \equiv 1[2]$, dans ce cas le nombre $n^4 + n^2 + 1$ est aussi impair. En plus, nous avons :

$n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$

ce qui justifie que $n^4 + n^2 + 1$ est non premier.

Barème :	
1° $n^4 + n^2 + 1$ est impair	4
$n^4 + n^2 + 1$ non premier	3
2° Valeurs de m	4
Valeurs communes	3
3° Condition $m - n + 1$ divise $2(n^2 - n + 1)$	2
Déduction nombre fini de valeurs de m	2
Présentation, idées	2

NB : on peut aussi traiter les deux cas n=2p et n=2p+1 pour démontrer que $n^4 + n^2 + 1$ est impair.

2) Lorsque $n = 3$, il est nécessaire que $m^2 + 10$ soit divisible par $m - 2$ et $m + 4$. On peut écrire $m^2 + 10 = (m-2)(m+2) + 14$, ce qui implique que $m - 2$ doit être un diviseur de 14.

De la même façon, $m^2 + 10 = (m-4)(m+4) + 26$ donc $m + 4$ doit diviser 26. Puisque $m - 2$ divise 14, $m - 2$ doit être un nombre parmi $-14, -7, -2, -1, 1, 2, 7, 14$ donc m doit être un nombre parmi $-12, -5, 0, 1, 3, 4, 9, 16$. Comme $m + 4$ divise 26, m doit être un nombre parmi $-30,-17,-6,-5,-3,-2,\ 9,\ 22$. Les seules valeurs de m communes aux deux listes sont $\boxed{m\ =\ -5}$ et $\boxed{m\ =\ 9}$.

3) On peut écrire $m^2+n^2+1=(m-n+1)(m+n+1)+2(n^2-n+1)$. Afin que $m-n+1$ divise m^2+n^2+1, il doit aussi diviser $2(n^2-n+1)$. Pour toute valeur de n, $2(n^2-n+1)>0$ et a donc un nombre fini de diviseurs positifs. Il y a donc un nombre fini de valeurs possibles pour m.

Exercice 3 : (20 points)

L'objectif est de déterminer la valeur de l'intégrale $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}dx$

1) On pose $g(x)=\sin x$ avec $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Calculer $(g^{-1})'(x)$.

2) En posant $x=\frac{\pi}{4}+y$, vérifier que $I=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos y}{\sqrt{2+\cos(2y)}}dy$

3) En posant $z=\sin y$, montrer que $I=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dz}{\sqrt{3-2z^2}}$

4) Exprimer alors la valeur de I en utilisant g^{-1}.

Solution

1) Soit $g(x)=\sin x$ avec $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$

Calcul de $(g^{-1})'(x)$: Nous avons : $(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$. Or $g'(x)=\cos x=\sqrt{1-g^2(x)}$ d'où

$$(g^{-1})'(x)=\frac{1}{g'(g^{-1}(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(g(g^{-1}(x))\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Barème :	
1°) calcul de g^{-1}	4
2°)	5
3°)	5
4°)	4
Présentation et idées	2

2) Si $x=\frac{\pi}{4}+y$, nous voyons alors que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}dx=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos y+\sin y)}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2y\right)}}dy$$

$$=\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos y}{\sqrt{2+\cos(2y)}}dy+\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin y}{\sqrt{2+\cos(2y)}}dy=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos y}{\sqrt{2+\cos(2y)}}dy$$

Car la première fonction est paire, la seconde impaire et l'intervalle d'intégration est symétrique par rapport à 0.

3) En posant $z=\sin y$ On obtient : $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos y}{\sqrt{2+\cos(2y)}}dy=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dz}{\sqrt{3-2z^2}}$

4) Pour $t=z\sqrt{\frac{2}{3}}$, on obtient : $2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dz}{\sqrt{3-2z^2}}=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}dt}{\sqrt{3}\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\sqrt{2}\left[g^{-1}(x)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

Et l'on peut conclure : $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin x\cos x}}dx=\sqrt{2}g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

Exercice 4 : (20 points)

Soit f la fonction définie par $f(t)=\frac{t-1}{t\ln t}$ si $t\in\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$ et $f(1)=1$.

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+\setminus\{0\}$ puis justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$ pour $x\in\mathbb{R}_+\setminus\{0,1\}$.

2) Utiliser $\int_x^{x^2}f(t)dt$ pour calculer $\lim_{x\to1}\left(\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt\right)$.

Solution

1) f est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0,1\}$ comme étant un rapport de deux fonctions continues sur cet ensemble.

Calculons la limite de f en 1 ; posons $t=1+h\ (h>-1)$; $f(1+h)=\dfrac{h}{(1+h)\ln(1+h)}$, on sait que la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+h)}{h}$ est 1. f a donc pour limite 1 en 1et par suite est continue en ce point. D'où $\boxed{\text{f est continue sur } \mathbb{R}_+\backslash\{0\}}$

2) (x est évidement supposé >0) f étant continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, elle admet donc une primitive F sur cet ensemble ; $\int_x^{x^2} f(t)\,dt$ existe donc et vaut $F(x^2)-F(x)$

Existence de $\int_x^{x^2}\dfrac{1}{\ln t}dt$ (on suppose $x>0$ et $x\neq 1$) :

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0,1\}$

De plus x et x^2 sont toujours d'un même coté de 1.

$t\mapsto\dfrac{1}{\ln t}$ est donc continue sur le segment d'extrémités x et x^2

$\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t}$ existe et vaut $\int_x^{x^2}\left(f(t)+\dfrac{1}{t\ln t}\right)dt=\int_x^{x^2}f(t)\,dt+\int_x^{x^2}\dfrac{1}{t\ln t}dt$ ce qui donne :

$F(x^2)-F(x)+\big[\ln|\ln t|\big]_x^{x^2}$ soit $F(x^2)-F(x)+\ln\left|\dfrac{\ln x^2}{\ln x}\right|=F(x^2)-F(x)+\ln 2$ car $\ln x^2=2\ln x$

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$, elle y est continue, $F(x^2)$ et $F(x)$ ont pout limite $F(1)$ en 1,

par conséquent $\boxed{\lim\limits_{x\to 1}\int_x^{x^2}\dfrac{dt}{\ln t}=\ln 2}$.

Barème :	
1°) continuité de f sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0,1\}$	4
continuité de f sur $\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$	4
2°) Existence de $\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt$	5
$\lim\limits_{x\to1}\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\ln 2$	5
Présentation et idées	2

Exercice 5 : (20 points)

ABC est un triangle d'angles aigus et dont les hauteurs $[AD]$ et $[BE]$ se coupent en H. soit $[M]$ le milieu de $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles DEM et ABH se coupent en P et Q avec P est le point situé dans le demi-plan délimité par (CH) contenant A. On désigne par R le point d'intersection de (ED) et (PH).

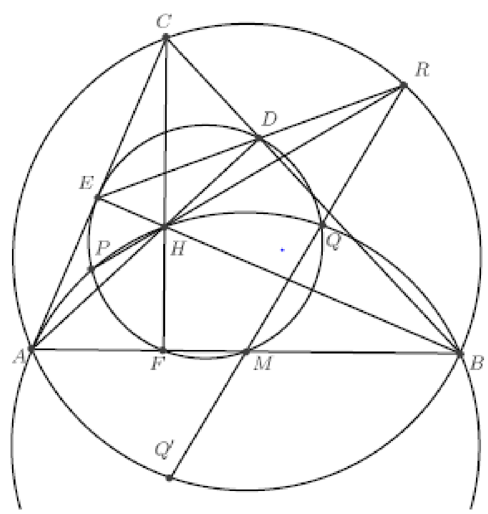
1) Montrer que $\widehat{RDA}=\widehat{RPA}$ puis déduire que les points B, P, R et E sont cocycliques.

2) Montrer que R appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Montrer que les droites (ED), (PH) et (MQ) sont concourantes en R.

Solution

1) Notons d'abord F le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Puisque les points E, C, D et H d'une part et A, P, H et B d'autre part sont cocycliques (en effet : ECH et DCH sont deux triangles rectangles de même hypoténuse $[CH]$, et le cercle circonscrit au triangle AHB passe par P on a :



$\widehat{RDA}=\pi-\widehat{EDA}$ angles supplémentaires

$=\pi-\widehat{EDH}$ alignement

$=\pi-\widehat{ECH}$ cocyclicité

$=\dfrac{\pi}{2}+\widehat{BAC}$

D'autre part $\widehat{RPA}=\widehat{HPA}=\pi-\widehat{HBA}=\dfrac{\pi}{2}+\widehat{BAC}$

Donc $\boxed{\widehat{RDA}=\widehat{RPA}}$

Comme $\widehat{RDA}=\widehat{RPA}$ donc les points A, P, D et R sont cocycliques ce qui implique que

$\widehat{PBE}=\widehat{PBH}$ (alignement)

$=\widehat{PAH}$ cocyclicité

$=\widehat{PAD}$ alignement

$=\widehat{PRD}$ cocyclicité

$=\widehat{PRE}$ alignement

Donc les points P, B, R et E sont cocycliques.

Barème :	
1°) égalité $\widehat{RDA}=\widehat{RPA}$	4
Co cyclicité de B,P, R, E	2
2°) $R \in C(ABC)$	3
3°)	4
4°	4
Présentation, rédaction et idées	2

2) Les points D, E, F et M appartiennent au cercle de 9 points du triangle ABC (cercle d'Euler passant par les trois milieux des trois côtés du triangle; le pied de chacune des trois hauteurs; le milieu de chacun des trios segments reliant l'orthocentre et un sommet du triangle) et puisque les quadrilatères APDR, BPRE, BCEF et ACDF sont inscriptibles on a :

$\widehat{ARB}=\widehat{PRB}-\widehat{PRA}=\widehat{PEB}-\widehat{PDA}=\widehat{PEF}+\widehat{FEB}-\widehat{PDF}+\widehat{ADF}=\widehat{FEB}+\widehat{ADF}=\widehat{FCB}+\widehat{ACF}=\widehat{ACB}$

Donc R, point d'intersection de (ED) et (PH) appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Soit Q' et R' les points d'intersections de (MQ) avec le cercle circonscrit au triangle ABC telle sorte que les points Q', M, Q et R' soient alignés dans cet ordre. Montrons que $R'=R$

Rappelons d'abord que le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est $\dfrac{AB}{2\sin\widehat{ACB}}$

Et celui du cercle circonscrit au triangle ABH est $\dfrac{AB}{2\sin\widehat{AHB}}=\dfrac{AB}{2\sin\left(\pi-\widehat{ACB}\right)}=\dfrac{AB}{2\sin\widehat{ACB}}$

Donc les deux cercles ont le même rayon, ils sont donc symétriques par rapport au point M, milieu de $[AB]$ et on a $MQ=MQ'$.

Comme les triangles AEB et ADB sont rectangles d'hypoténuse $[AB]$ alors le point M, milieu de $[AB]$ est le centre des cercles circonscrits aux triangles AEB et ADB alors $MA=ME=MD=MB$

De la puissance du point M par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC on a :

$$MQ\times MR'=MR\times MR'=MA\times MB=MD^2$$

en particulier cela signifie que le cercle circonscrit au triangle $DR'Q$ est tangent à (MD)

ce qui veut dire d'après le théorème de la tangente que $\widehat{QR'D}=\widehat{MDQ}$ et de l'alignement on a $\widehat{MR'D}=\widehat{MDQ}$

D'une manière analogue on montre que $MQ\bullet MR'=ME^2$ et par suite

$\widehat{MR'E}=\widehat{QR'E}=\widehat{MEQ}$ et $\widehat{MR'E}=\widehat{MEQ}=\widehat{MDQ}=\widehat{MR'D}$ Donc $R'\in(ED)$

D'une manière analogue on montre que le point R'', intersection de (MP) et le cercle circonscrit au triangle ABC, appartient à (ED).

Donc les points R, R', R'' sont communs à (ED) et au cercle circonscrit au triangle ABC, alors deux parmi ces trois points sont confondus.

Or, $R\in(PH)$, $R''\in(MP)$ et (MP) et (PH) se coupent en P alors $R\neq R''$

De même $R'\in(MQ)$, $R''\in(MP)$ et (MP) et (MP) se coupent en M alors $R'\neq R''$

D'où $R=R'$

Fin.