Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales | **Niveau 7C** | **25 février 2018**

$2^{\text{ème}}$ tour | | **Durée 3 h**

Solution

proposée par Moctar Baba Hamdi

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (20 points)

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.
Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.
Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve. Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5) , le nombre 8 par (5, 4).

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18							

1° Comment est repéré le nombre 42 ?
2° Comment est repéré le nombre 2018 ?
3° Quel est le nombre qui est sous 2018 ?

Solution

On numérote les lignes comme indiqué ci-dessous.

Attention ! La n-ième ligne n'est pas forcément désignée par le nombre n. Par exemple, la $3^{ème}$ ligne est désignée selon l'énoncé par le nombre 5. On verra après la relation entre le numéro d'une ligne et le nombre par lequel elle est désignée.

				1					← $1^{ère}$ ligne
			2	3	4				← $2^{ème}$ ligne
		5	6	7	8	9			← $3^{ème}$ ligne
	10	11	12	13	14	15	16		← $4^{ème}$ ligne
17	18	19	20	21	22	23	24	25	← $5^{ème}$ ligne

On remarque que dans la n-ième ligne on a écrit $2n-1$ nombres, dont le dernier (celui écrit dans sa case à droite) est le nombre n^2.
Montrons ceci par récurrence :

- Initialisation : Cette proposition est clairement vraie pour $n = 1$.
- Hérédité : Supposons qu'elle vraie pour un entier non nul n, et démontrons qu'elle est aussi vraie pour $n + 1$:
Le nombre de chiffres inscrits dans la $(n + 1)$-ième ligne est celui de la n-ième ligne augmenté de 2, il est alors d'après l'hypothèse de récurrence :

$$2n - 1 + 2 = 2(n + 1) - 1$$

Et comme, par hypothèse de récurrence, la ligne précédente se termine par le nombre n^2, alors cette ligne se termine par la somme de ce nombre et du nombre de chiffres écrit dans cette ligne, soit :

$$n^2 + (2(n + 1) - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

- Conclusion : La proposition est donc vraie pour tout entier non nul n.
La n-ième ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case (celle à gauche), soit :

$$(n - 1)^2 + 1$$

car sa précédente se termine par $(n - 1)^2$.
Dans la suite, on se donne un nombre non nul k, et on se propose de déterminer « ses coordonnées ».
k appartient à la n-ième ligne où n est l'entier tel que :

$$(n - 1)^2 < k \leq n^2$$
$$\Leftrightarrow n - 1 < \sqrt{k} \leq n$$

Cette ligne est désignée par le nombre $(n - 1)^2 + 1$.
Pour déterminer la colonne dont appartient k, on doit d'abord voir si k est plus proche de $(n - 1)^2 + 1$ ou de n^2. Pour ceci, on le compare alors à $m = \frac{(n-1)^2+1+n^2}{2}$.
- Si $k = m$, alors il appartient à la colonne centrale désignée par 1.
- Si $k > m$, alors il est plus proche de n^2. On pose : $d = n^2 - k$. La case la plus haute de la colonne qui contient k est la dernière case de la $(n - d)$-ième ligne. Cela signifie que k appartient à la colonne désignée par $(n - d)^2$.

$$\begin{array}{ccc} (n-d)^2 & & \\ \vdots & \ddots & \\ k & \cdots & n^2 \end{array}$$

- Si $k < m$, alors il est plus proche de $(n - 1)^2 + 1$. On pose : $d = k - (n - 1)^2 - 1$. La case la plus haute de la colonne qui contient k est la première case de la $(n - d)$-ième ligne. k appartient à la colonne désignée par $(n - d - 1)^2 + 1$.

$$\begin{array}{ccc} & & (n-d-1)^2+1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\ (n-1)^2+1 & \cdots & k \end{array}$$

1. Déterminons les « coordonnées » de 42 :
On a :

$$6^2 = 36 < 42 \leq 49 = 7^2$$

Donc 42 appartient à la ligne désignée par $6^2 + 1 = 37$.

Avec les notations précédentes, on a : $m = \frac{6^2+1+7^2}{2} = 43 > 42$, et par suite 42 est plus proche de 37, et vu que $d = 42 - 37 = 5$, alors il appartient à la colonne désignée par $(7-5-1)^2 + 1 = 2$.

42 est donc repéré par $(37, 2)$.

2. Déterminons les « coordonnées » de 2018 :

On a :

$$\sqrt{2018} \approx 44, \ldots$$

$$\Rightarrow 44^2 = 1936 < 2018 \leq 2025 = 45^2$$

Donc 2018 appartient à la ligne désignée par $44^2 + 1 = 1937$.

D'autre part, 2018 est plus proche de 2025 que de 1937, et vu que $d = 2025 - 2018 = 7$, alors il appartient à la colonne désignée par $(45-7)^2 = 1444$.

2018 est alors repéré par $(1937, 1444)$.

3. Précisons le nombre écrit en dessous de 2018 :

Le nombre écrit en dessous de 2018 est dans la $46^{ème}$ ligne, il précède 46^2 par 8 nombres car 2018 précède 45^2 par 7 nombres. C'est donc le nombre :

$$46^2 - 8 = 2108$$

Exercice 2 ; (20 points)

On voudrait recouvrir la surface d'un carré ABCD de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm.

1) Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q. Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP]. Soit U le point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].

a) Faire une figure et calculer DT.

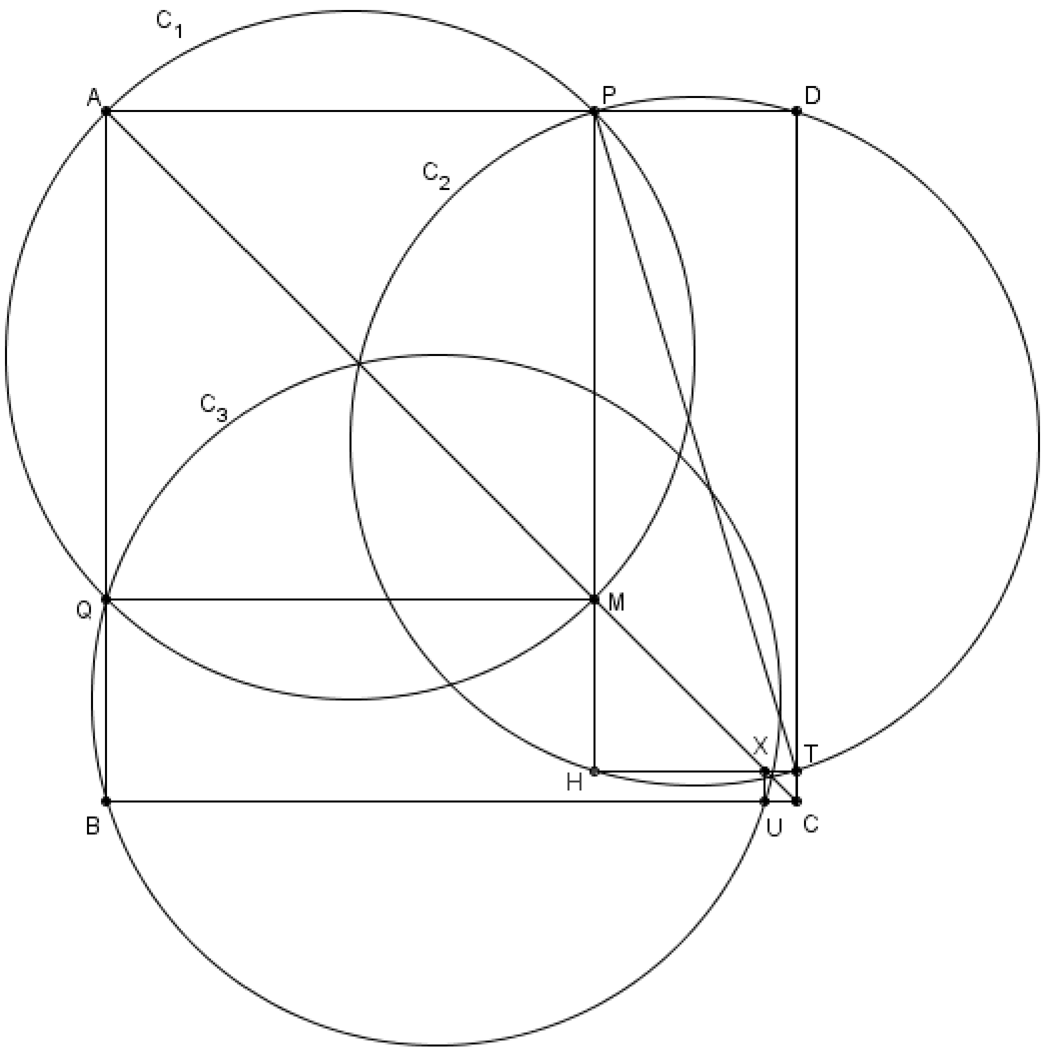
b) On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2.

c) On dit qu'un cercle recouvre un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de $99,75\%$ de la surface du carré ABCD.

2) Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

Solution

1. a) Figure :



Calcul de la distance DT :
Le triangle DTP est rectangle en D, donc, par Pythagore, on a :

$$DT = \sqrt{PT^2 - DP^2} = \sqrt{10^2 - DP^2} \quad (*)$$

P est un point du cercle C_1 de diamètre $[AM]$, donc le triangle AMP est rectangle en P, et par conséquent :

$$AP = AM\cos(\widehat{MAP}) = AM\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

La distance DP vaut alors :

$$DP = AD - AP = 10 - 5\sqrt{2} = 5(2 - \sqrt{2})$$

La relation $(*)$ entraîne, alors, que :

$$DT = \sqrt{10^2 - 5^2(2-\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{4 - (2-\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{4 - 4 + 4\sqrt{2} - 2}$$
$$= 5\sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)}$$

b) Montrons que M et X sont situés à l'intérieur du cercle C_2 :
Soit H le point où la droite (PM) recoupe le cercle C_2.
On sait déjà que les triangles DTP et AMP sont rectangles en D et P respectivement. Le triangle THP est aussi rectangle en H car $[PT]$ est un diamètre du cercle C_2 passant par H. Ceci prouve que le quadrilatère $DTHP$ admet trois angles droits, et qu'il est par suite un rectangle.

On a alors :

$$PH = DT = 5\sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)}$$

Mais comme APM est isocèle en P (car il est rectangle et l'un de ses angles, $\widehat{MAP}$, mesure $\frac{\pi}{4}$), alors :

$$PM = AP = 5\sqrt{2}$$

Donc :

$$PH > PM$$

Car :

$$\sqrt{2} > 1 \Rightarrow 2\sqrt{2} - 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)} > \sqrt{2}$$

Ainsi , M est un point du segment $[PH]$ distinct de P et de H, et comme $[PH]$ est une corde du cercle C_2, donc M est à l'intérieur de ce cercle.
D'autre part, la droite (HT) est perpendiculaire à (DC) et, par suite, parallèle à (BC), d'où $X \in (HT)$. Montrons alors que $X \in [HT]$.
Le triangle CTX est isocèle en T (car il est rectangle et $\widehat{TCX} = \frac{\pi}{4}$), donc :

$$TX = TC = DC - DT = 10 - 5\sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)}$$

Et on sait que :

$$TH = DP = AD - AP = 10 - 5\sqrt{2}$$

Donc :

$$TH > TX$$

Car :

$$\sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)} > \sqrt{2} \Rightarrow 10 - 5\sqrt{2} > 10 - 5\sqrt{2(2\sqrt{2} - 1)}$$

Ainsi, X est un point de la corde $[TH]$ du cercle C_2 distinct de T et de H, d'où il est à l'intérieur du cercle.
c) Montrons que les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de $99,75\%$ de la surface du carré $ABCD$:
On découpe la surface du carré $ABCD$ en plusieurs parties.
La surface du carré $APMQ$ est recouverte par le cercle C_1.
Comme $[PT]$ est un diamètre du cercle C_2 et le triangle DPT est rectangle en D, alors $D, P, T \in C_2$. Et comme, en plus, M et X sont à l'intérieur de ce cercle d'après la question précédente, alors l'aire du polygone $DPMXT$ est recouverte par C_2.
On montre d'une façon analogue que le cercle C_3 recouvre la surface du polygone $BQMXU$.
La partie restante de la surface du carré $ABCD$ est l'aire du carré $TXUC$ (c'est un carré car il admet trois angles droits et $TX = TC$ (cf. question précédente)).
Comme X est à l'intérieur de C_2 , alors la surface $\mathcal{A}$ de la partie du carré $ABCD$ non recouverte par les trois cercles C_1, C_2 et C_3 est inférieure à l'aire du carré $TXUC$. On a alors :

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_{ABCD}} \leq \frac{TX^2}{AB^2} = \frac{\left(10 - 5\sqrt{2(2\sqrt{2}-1)}\right)^2}{10^2} = \frac{5^2\left(2 - \sqrt{2(2\sqrt{2}-1)}\right)^2}{10^2}$$
$$= \frac{\left(2 - \sqrt{4\sqrt{2}-2}\right)^2}{4} = \frac{4 + (4\sqrt{2}-2) - 4\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{4}$$
$$= \frac{2 + 4\sqrt{2} - 4\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{4} = \frac{1}{2} + \sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{2}-2} \approx 0,0019$$

Donc cette aire $\mathcal{A}$ représente moins de $0,25\%$ de la surface du carré $ABCD$, ce qui montre que les trois cercles recouvrent à eux trois plus de $99,75\%$ de la surface du carré $ABCD$.

2. Prouvons qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré $ABCD$ avec trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon $5\ cm$:

Aucun des cercles C_1, C_2 et C_3 de la question précédente ne recouvre le point C (et même d'autres points du carré $ABCD$). Ces trois cercles ne recouvrent pas donc toute la surface de ce carré.

Par ailleurs, s'il est possible de recouvrir toute la surface de $ABCD$ par trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de même rayon $5\ cm$, alors on peut « coulisser » C_1, C_2 et C_3 pour les superposer avec Γ_1, Γ_2 et Γ_3 respectivement.

Ceci est impossible vu que la position actuelle de C_1, C_2 et C_3 est optimale. En effet, si on modifie la position du cercle C_2, par exemple, on risque d'échapper le sommet D ou de diminuer les parties recouvertes des côtés $[AD]$ et $[DC]$.

Il est, alors, impossible de recouvrir toute la surface du carré $ABCD$ avec trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon $5\ cm$.

Exercice 3 : (20 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 15; \quad U_1 = 57 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le reste de la division euclidienne de U_n par 9.

1) Calculer : $V_0, V_1, ..., V_9$.

2) Justifier que la suite (V_n) est périodique. Déterminer sa période.

3) Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid U_{2018}$.

Solution

$$\begin{cases} U_0 = 15, U_1 = 57 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n est le reste de la division euclidienne de U_n par 9.

1. Calcul des termes $V_0, V_1, \dots, V_9$:

Il est clair que $V_0 = 6$ et $V_1 = 3$.

D'autre part :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \equiv V_n \quad [9]$$

Donc, d'après la relation de récurrence vérifiée par U_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+2} \equiv V_{n+1} + V_n \quad [9]$$

Ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_{n+2} est le reste de la division euclidienne de $V_{n+1} + V_n$ par 9, car V_{n+2} est compris entre 0 et 8 comme reste de la division euclidienne de U_{n+2} par 9.

Cette relation de récurrence permet de calculer les différents termes de la suite V_n. Le tableau suivant récapitule les valeurs des 10 premiers termes de V_n :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V_n	6	3	0	3	3	6	0	6	6	3

2. Justifions que (V_n) est périodique et déterminons sa période :

On remarque que $V_8 = V_0$ et $V_9 = V_1$. Montrons, alors, par récurrence que $V_{n+8} = V_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

- La propriété est vraie pour $n \in \{0, 1\}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $V_{n+8} = V_n$ et $V_{n+9} = V_{n+1}$ et montrons que $V_{n+10} = V_{n+2}$:

V_{n+10} est le reste de la division euclidienne de $V_{n+9} + V_{n+8}$ par 9, soit, par hypothèse de récurrence, le reste de la division euclidienne de $V_{n+1} + V_n$ par 9, d'où $V_{n+10} = V_{n+2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+8} = V_n$ et la suite (V_n) est périodique de période 8.

3. Trouvons le plus grand entier k tel que : $3^k \mid U_{2018}$:

Comme $2018 = 2 + 252 \times 8$, alors d'après la question précédente :

$$V_{2018} = V_2 = 0$$

Donc :

$$3^2 = 9 \mid U_{2018}$$

Dans la suite on se propose de vérifier si $3^3 \mid U_{2018}$ ou non. Pour cela on utilise la même démarche adoptée dans la question 1.. On pose, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est le reste de la division euclidienne de U_n par $27 = 3^3$.

Un raisonnement identique à celui de la question précédente montre que (W_n) est périodique. Sa période est le plus petit entier non nul n_0 vérifiant $W_{n_0} = W_0$ et $W_{n_0+1} = W_1$. On calcule, donc, les termes successifs de (W_n) et on s'arrête dès qu'on trouve cet entier :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
W_n	15	3	18	21	12	6	18	24	15	12
n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
W_n	0	12	12	24	9	6	15	21	9	3
n	20	21	22	23	24	25				
W_n	12	15	0	15	15	3				

Ainsi, La période de (W_n) est 24.

Par ailleurs :

$$W_{2018} = W_{2+84\times24} = W_2 = 18$$

Et par suite, $3^3 = 27$ ne divise pas U_{2018}.

Ainsi, 2 est le plus grand entier k tel que : $3^k \mid U_{2018}$.

Exercice 4 : (20 points)

Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant : $\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)zx = 4 \\ (z+1)xy = 4 \end{cases}$

Solution

Résolution du système :

$$\begin{cases}(x+1)yz=12 & (1)\\ (y+1)zx=4 & (2)\\ (z+1)xy=4 & (3)\end{cases}$$

Si (x,y,z) une solution de ce système, alors x,y et z sont tous non nuls. L'identification des équations (2) et (3), donne :

$$(y+1)zx=(z+1)xy \Leftrightarrow xyz+xz=xyz+xy \Leftrightarrow xz=xy \Leftrightarrow z=y$$

L'équation (1) devient alors :

$$(x+1)y^2=12 \Leftrightarrow x=\frac{12}{y^2}-1=\frac{12-y^2}{y^2}$$

En injectant cette expression de x dans l'équation (2), on obtient :

$$(y+1)y\frac{12-y^2}{y^2}=4 \Leftrightarrow (y+1)(12-y^2)=4y \Leftrightarrow y^3+y^2-8y-12=0$$

On vérifie que 3 est solution de cette dernière équation, et on factorise le membre à droite pour trouver :

$$(y-3)(y^2+4y+4)=0 \Leftrightarrow (y-3)(y+2)^2=0 \Leftrightarrow (y=3 \text{ ou } y=-2)$$

Si $z=y=3$, alors $x=\frac{1}{3}$, et si $z=y=-2$, alors $x=2$.

Réciproquement, il est clair que les triplets $\left(\frac{1}{3},3,3\right)$ et $(2,-2,-2)$ sont des solutions du système. Son ensemble de solutions est alors :

$$S=\left\{\left(\frac{1}{3},3,3\right),(2,-2,-2)\right\}$$

Exercice 5 : (20 points)

Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x;y)$ associe l'entier naturel tel que : $f(0;y)=y+1$, $f(x;\ 0)=f(x-1;1)$, $f(x+1;y+1)=f(x;f(x+1;y))$

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$.

Solution

$$\forall(x,y)\in\mathbb{N}^2,\begin{cases}f(0,y)=y+1\\ f(x+1,0)=f(x,1)\\ f(x+1,y+1)=f\big(x,f(x+1,y)\big)\end{cases}$$

Calculons $f(2,1)$ et $f(2,2)$:

On a :

$$f(2,1)=f\big(1,f(2,0)\big)=f\big(1,f(1,1)\big)$$

Mais :

$$f(1,1)=f\big(0,f(1,0)\big)=f(1,0)+1=f(0,1)+1=1+1+1=3$$

Donc :

$$\begin{aligned}f(2,1)=f(1,3)=f\big(0,f(1,2)\big)=f(1,2)+1=f\big(0,f(1,1)\big)+1=f(1,1)+1+1\\ =3+2=5\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(2,1)=5$$

De même :

$$\begin{aligned}f(2,2)=f\big(1,f(2,1)\big)=f(1,5)=f\big(0,f(1,4)\big)=f(1,4)+1=f\big(0,f(1,3)\big)+1\\ =f(1,3)+1+1=5+1+1=7\end{aligned}$$

D'où :

$$f(2,2)=7$$