Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_{n,k}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^k)^n}$

1.a) Calculer $I_{0,k}$; $I_{n,1}$ et $I_{1,2}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x\in[0,1]$, on ait : $\frac{1}{1+x^3}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$ puis en déduire la valeur de $I_{1,3}$.

2) Pour $k\geq 2$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $J_{n,k}=\int_0^1\frac{x^k}{(1+x^k)^n}dx$.

a) Etablir une relation entre $J_{n,k}$; $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_{n,k}=\frac{1}{k(n-1)2^{n-1}}+\frac{1}{k(n-1)}I_{n-1,k}$

c) En déduire une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$ pour tout $n\geq 2$.

d) En déduire $I_{3,2}$.

Corrigé

1.a) $I_{0,k}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^k)^0}=\int_0^1 dx=1$;

Si $n\neq 1$, $I_{n,1}=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^n}=\left[\frac{-1}{(n-1)(1+x)^{n-1}}\right]_0^1=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$;

Si $n=1$, $I_{n,1}=I_{1,1}=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=[\ln(1+x)]_0^1=\ln 2$.

$I_{1,2}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=[\tan^{-1}t]_0^1=\frac{\pi}{4}$.

b) $\frac{1}{1+x^3}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}=\frac{(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)}{1+x^3}\Rightarrow$

$$\begin{cases}a+b=0\\-a+b+c=0\\a+c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{3};b=\frac{-1}{3}\ \text{ et }\ c=\frac{2}{3}.$$

Donc $$\frac{1}{1+x^3}=\frac{\frac{1}{3}}{1+x}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}.$$

On peut écrire $$\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}.\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x^2-x+1}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+2\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+2.\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{-x+2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

Enfin, $$\boxed{\frac{1}{1+x^3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}$$

On a $I_{1,3}=\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}$

Alors $$I_{1,3}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx-\frac{1}{6}\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

On a $\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{3}[\ln(1+x)]_0^1=\frac{\ln 2}{3}$; $\frac{1}{6}\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{6}\left[\ln(x^2-x+1)\right]_0^1=0$;

et pour $\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$ **, on pose** $t=\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Donc $\begin{cases} x=0\Rightarrow t=-\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x=1\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$ **et** $dt=\frac{2}{\sqrt{3}}dx\Rightarrow dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt$.

$$\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{2}{3}\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{t^2+1}\frac{\sqrt{3}}{2}dt$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{t^2+1}dt$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}[\tan^{-1}t]_{\frac{-1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{-\pi}{6}\right)$$

$$\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Alors $I_{1,3}=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **D'où** $I_{1,3}=\frac{3\ln 2+\pi\sqrt{3}}{9}$.

$$J_{n,k}=\int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n}dx=\int_0^1 \frac{\left(1+x^k\right)-1}{\left(1+x^k\right)^n}dx=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^{n-1}}dx-\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^n}dx \Rightarrow \boxed{J_{n,k}=I_{n-1,k}-I_{n,k}}$$

$$J_{n,k}+I_{n,k}=\int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n}dx+\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^n}dx=\int_0^1 \frac{\left(1+x^k\right)}{\left(1+x^k\right)^n}dx=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^k\right)^{n-1}}dx=I_{n-1,k} \Rightarrow \boxed{J_{n,k}+I_{n,k}=I_{n-1,k}}$$

b) Pour $n>1$; **on posant** $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{x^{k-1}}{(1+x^k)^n} \end{cases}$ **on obtient** $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\dfrac{-1}{k(n-1)(1+x^k)^{n-1}} \end{cases}$.

On trouve $J_{n,k}=\left[\frac{-x}{k(n-1)\left(1+x^k\right)^{n-1}}\right]_0^1+\frac{1}{k(n-1)}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^k)^{n-1}}dx$

$$\Rightarrow \boxed{J_{n,k}=\frac{-1}{k(n-1)2^{n-1}}+\frac{1}{k(n-1)}I_{n-1,k}}$$

c) On a $\begin{cases} J_{n,k}=I_{n-1,k}-I_{n,k} \\ J_{n,k}=\dfrac{-1}{k(n-1)2^{n-1}}+\dfrac{1}{k(n-1)}I_{n-1,k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{I_{n,k}=\frac{1}{k(n-1)2^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{k(n-1)}\right)I_{n-1,k}}$

d) $I_{3,2}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}I_{2,2}$ **or** $I_{2,2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}I_{1,2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{4}=\frac{2+\pi}{8}$ **, donc** $I_{3,2}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\times\frac{2+\pi}{8}=\frac{8+3\pi}{32}$.

Exercice 2

Dans le plan, on donne n points $A_1, A_2, \dots, A_n$. **On se propose d'étudier l'existence de n points** $M_1, M_2, \dots, M_n$ **tels que** A_1 **soit le milieu de** $[M_1, M_2]$, A_2 **soit le milieu de** $[M_2, M_3]$..., A_{n-1} **soit le milieu de** $[M_{n-1}, M_n]$ **et** A_n **soit le milieu de** $[M_n, M_1]$. **On note** z_k, a_k **les l'affixes respectives des points** M_k **et** A_k **.**

1) On suppose l'existence d'une solution du problème.

a) Justifier que : $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $z_k+z_{k+1}=2a_k$ **et** $z_n+z_1=2a_n$

b) Montrer que : $\left(1-(-1)^n\right)z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\dots+2(-1)^{n-1}a_1$

2) Discuter selon la parité de n l'existence d'une solution du problème.

Corrigé

1. a) $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, A_k **est le milieu de** $[M_kM_{k+1}] \Rightarrow a_k=\frac{z_k+z_{k+1}}{2} \Rightarrow 2a_k=z_k+z_{k+1}$.

En plus, puisque A_n **est le milieu de** $[M_nM_1]$ **alors** $a_n=\frac{z_n+z_1}{2} \Rightarrow 2a_n=z_n+z_1$.

b) On écrit cette égalité pour 0,1, …, n-1 ; et on multiplie alternativement par (-1) :

$$\begin{cases}(-1)^0(z_1+z_n)=2(-1)^0a_n\\(-1)^1(z_n+z_{n-1})=2(-1)^1a_{n-1}\\(-1)^2(z_{n-1}+z_{n-2})=2(-1)^2a_{n-2}\\ \ldots.\\(-1)^{n-2}(z_3+z_2)=2(-1)^{n-2}a_2\\(-1)^{n-1}(z_2+z_1)=2(-1)^{n-1}a_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1+(-1)^{n-1}z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots+2(-1)^{n-2}a_2+2(-1)^{n-1}a_1$$

$$\Rightarrow (1-(-1)^n)z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots+2(-1)^{n-2}a_2+2(-1)^{n-1}a_1$$

2) Remarquons que si on trouve M_1 alors $M_2=S_{A_1}(M_1)$, $M_3=S_{A_2}(M_2)$, …, $M_n=S_{A_{n-1}}(M_{n-1})$. Donc la recherche d'une solution se réduit donc à trouver M_1, c'est-à-dire trouver le complexe z_1.

Soit (E) l'équation $(1-(-1)^n)z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots+2(-1)^{n-1}a_1$.

On étudie deux cas :

<u>1er cas :</u>

Si n est pair l'équation (E) s'écrit : $0\times z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots+2a_2-2a_1$. Ce qui équivaut à $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\ldots+a_2-a_1=0$.

Si les affixes des points $A_1,A_2,\ldots,A_n$ vérifient $a_n\neq a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}-\ldots-a_2+a_1$ alors (E) n'a pas de solution et donc le problème n'a pas de solution.

Si les affixes des points $A_1,A_2,\ldots,A_n$ vérifient $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}-\ldots-a_2+a_1$ alors (E) admet tout complexe z_1 comme solution et donc le problème admet une infinité de solutions.

<u>2nd cas :</u>

Si n est impair alors l'équation (E) s'écrit : $2z_1=2a_n-2a_{n-1}+2a_{n-2}-2a_{n-3}+\ldots-2a_2+2a_1$

Ce qui équivaut à $z_1=a_n-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}+\ldots-a_2+a_1$. Le nombre z_1 existe toujours, et il est unique. Donc le point M_1 existe. D'où l'existence des points $M_2=S_{A_1}(M_1)$, $M_3=S_{A_2}(M_2)$, …, $M_n=S_{A_{n-1}}(M_{n-1})$.

Dans ce cas le problème admet une unique solution.

Exercice 3

Soit $A(z)=(z+1)^{2n}-1$, où $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer qu'il existe un polynôme B tel que $A(z)=z\times B(z)$.

b) Soit $B(z)=b_{2n-1}z^{2n-1}+b_{2n-2}z^{2n-2}+\ldots+b_1z+b_0$, quelle est la valeur de b_0 ?

c) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0,z_1,z_2,\ldots,z_{2n-1}$ avec $z_0=0$.

2.a) On pose $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$. Montrer à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n=\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$.

b) En déduire que, si $Q_n=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n=\sqrt{Q_n}$.

c) Calculer de deux façons $\prod_{k=1}^{2n-1}z_k$. Puis en déduire Q_n et enfin P_n.

Corrigé

1. a) $A(0)=(0+1)^{2n}-1=1-1=0$, donc 0 est une racine de A, donc A est factorisable par z d'où l'existence d'un polynôme B tel que $A(z)=z\times B(z)$.

b) Comme le degré de A est 2n alors celui de B est $2n-1$.

D'après le développement du binôme de Newton on a

$$A(z)=(z+1)^{2n}-1=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}z^{k}-1=-1+C_{2n}^{0}z^{0}+C_{2n}^{1}z+\sum_{k=2}^{2n}C_{2n}^{k}z^{k}=z\left(C_{2n}^{1}+\sum_{k=2}^{2n}C_{2n}^{k}z^{k-1}\right)$$ alors on a

$B(z)=C_{2n}^{1}+\sum_{k=2}^{2n}C_{2n}^{k}z^{k-1}$ avec $k\geq 2$ d'où $B(0)=C_{2n}^{1}$. Alors $b_0=C_{2n}^{1}=2n$.

c) $A(z)=0\Leftrightarrow (z+1)^{2n}=1\Leftrightarrow z+1=e^{i\frac{2k\pi}{2n}}=e^{i\frac{k\pi}{n}}\Leftrightarrow z=e^{i\frac{k\pi}{n}}-1$

Les solutions z_k de l'équation $A(z)=0$ sont tels que $z_0=0$ et pour tout entier $1\leq k\leq 2n-1$

$$z_k=e^{i\frac{k\pi}{n}}-1=2i\sin\frac{k\pi}{2n}e^{i\frac{k\pi}{2n}}=2\sin\frac{k\pi}{2n}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}\Rightarrow \boxed{z_k=2\sin\frac{k\pi}{2n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)\right)}.$$

On signale que $2\sin\frac{k\pi}{2n}>0$ car $0<\frac{\pi}{2n}\leq\frac{k\pi}{2n}\leq\frac{(2n-1)\pi}{2n}<\pi$.

2. a) $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$, posons $p=2n-k$ alors $k=1\Rightarrow p=2n-1$ et $k=n-1\Rightarrow p=n+1$ donc

$$P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\prod_{p=n+1}^{2n-1}\sin\frac{(2n-p)\pi}{2n}=\prod_{p=n+1}^{2n-1}\sin\left(\pi-\frac{p\pi}{2n}\right)=\prod_{p=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)=\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

b) $$Q_n=\prod_{k=1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\sin\frac{n\pi}{2n}\times\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2=P_n^{\ 2}.$$

Or $P_n^{\ 2}=Q_n$ et $P_n=\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}>0$, on a $P_n=\sqrt{Q_n}$.

c) $$\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}\right)=\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)\times\prod_{k=1}^{2n-1}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}.$$ Or $\prod_{k=1}^{2n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{2n}\right)=2^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}\left(\sin\frac{k\pi}{2n}\right)=2^{2n-1}Q_n$ et

$\prod_{k=1}^{2n-1}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}=e^{i\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2n}\right)}=e^{i(2n-1)\pi}=-1$. D'où $\boxed{\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=-2^{2n-1}Q_n}$.

D'autre part on a $B(z)=(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_{2n-1})$. Donc $B(0)=\prod_{k=1}^{2n-1}(-z_k)=(-1)^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=-\prod_{k=1}^{2n-1}z_k$ or

$B(0)=b_0=2n$ donc on a $\boxed{\prod_{k=1}^{2n-1}z_k=-2n}$

Alors $-2^{2n-1}Q_n=-2n$ D'où $Q_n=\frac{-2n}{-2^{2n-1}}=\frac{n}{2^{2n-2}}=\frac{n}{4^{n-1}}$ et $P_n=\sqrt{Q_n}\Rightarrow P_n=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Exercice 4

Soient a, b et c des réels. On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}(b+c)^2 & b^2 & c^2\\ a^2 & (a+c)^2 & c^2\\ a^2 & b^2 & (a+b)^2\end{pmatrix}$

1) Montrer que $\det M=2abc(a+b+c)^3$

2) Discuter suivant a, b et c les solutions du système : $\begin{cases}(b+c)^2x+b^2y+c^2z=1\\ a^2x+(c+a)^2y+c^2z=1\\ a^2x+b^2y+(a+b)^2z=1\end{cases}$

Corrigé

1) $\det M=(b+c)^2\begin{vmatrix}(a+c)^2 & c^2\\ b^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}-a^2\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\ b^2 & (a+b)^2\end{vmatrix}+a^2\begin{vmatrix}b^2 & c^2\\ (a+c)^2 & c^2\end{vmatrix}$

$\det M=(b+c)^2\left[(a+c)^2(a+b)^2-b^2c^2\right]-a^2\left[b^2(a+b)^2-b^2c^2\right]+a^2\left[b^2c^2-c^2(a+c)^2\right]$

$\det M=(b+c)^2\left((a+c)(a+b)-bc\right)\left((a+c)(a+b)+bc\right)-a^2b^2\left((a+b)+c\right)\left((a+b)-c\right)+a^2c^2(b+a+c)(b-a-c)$

$\det M=(b+c)^2(a^2+ab+ac)(a^2+ab+ac+2bc)-a^2b^2(a+b+c)(a+b-c)+a^2c^2(a+b+c)(b-a-c)$

$\det M=a(a+b+c)\left[(b+c)^2(a^2+ab+ac+2bc)-ab^2(a+b-c)+ac^2(b-a-c)\right]$

$\det M=a(a+b+c)\left[(b+c)^2(a^2+ab+ac+2bc)-ab^2(a+b-c)+ac^2(b-a-c)\right]$

$\det M=a(a+b+c)\left[(b^2+2bc+c^2)(a^2+ab+ac+2bc)-ab^2(a+b-c)+ac^2(b-a-c)\right]$

$\det M=a(a+b+c)\left[\begin{array}{l}\cancel{b^2a^2}+\cancel{ab^3}+ab^2c+2b^3c+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2+4b^2c^2+\cancel{a^2c^2}+\\ abc^2+\cancel{ac^3}+2bc^3-\cancel{a^2b^2}-\cancel{ab^3}+ab^2c+ac^2b-\cancel{a^2c^2}-\cancel{ac^3}\end{array}\right]$

$\det M=a(a+b+c)\left[ab^2c+2b^3c+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2+4b^2c^2+abc^2+2bc^3+ab^2c+ac^2b\right]$

$\det M=a(a+b+c)\left[2a^2bc+2b^3c+2bc^3+4ab^2c+4b^2c^2+4ac^2b\right]$

$\det M=2abc(a+b+c)\left[a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\right]$

$\det M=2abc(a+b+c)(a+b+c)^2$

$\det M=2abc(a+b+c)^3$

2.a) Si le déterminant $abc(a+b+c)\neq 0$, le système est de Cramer et on obtient après calcul :

$$x=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)},\quad y=\frac{(a-b-c)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)}\ \text{ et }\ z=\frac{(a-b+c)(-a+b+c)}{2abc(a+b+c)}.$$

b) Si $abc(a+b+c)=0$, on a : $abc=0$ ou $a+b+c=0$

- **1^{er} cas : $abc=0$**
- **Si $a=0$ le système s'écrit :**

$$\begin{cases}(b+c)^2x+b^2y+c^2z=1\\ c^2(y+z)=1\\ b^2(y+z)=1\end{cases}$$

- ✓ **Si $a=0$ et $b^2\neq c^2$; le système n'a pas de solution.**
- **C'est le même résultat si ($b=0$ et $c^2\neq a^2$) ou ($c=0$ et $a^2\neq b^2$).**
- ✓ **Si $a=0$ et $b=c\neq 0$; le système équivaut à :**

$$\begin{cases}4x+y+z=\dfrac{1}{b^2}\\ y+z=\dfrac{1}{b^2}\end{cases}$$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{(0,y,\dfrac{1-b^2y}{b^2});y\in\mathbb{R}\right\}$.

- **Des résultats analogues si ($b=0$ et $c=a\neq 0$) ou ($c=0$ et $a=b\neq 0$).**

- ✓ **Si $a=b=c=0$; le système n'a pas de solution.**

✓ Si $a=0$ et $b=-c\neq 0$; le système équivaut à l'équation: $y+z=\frac{1}{b^2}$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{(x,y,\frac{1-b^2y}{b^2});x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

- Des résultats analogues si $(b=0$ et $c=-a\neq 0)$ ou $(c=0$ et $a=-b\neq 0)$.

➢ 2^{nd} cas : $abc\neq 0$ et $a+b+c=0$:

Le système équivaut à l'équation: $a^2x+b^2y+c^2z=1$

Donc l'ensemble de solutions est $\left\{(x,y,\frac{1-a^2x-b^2y}{c^2});x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 5

On se propose de déterminer une fonction de $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ qui vérifie les deux conditions : $f(1)=1$ et pour tous les entiers naturels m et n, $f(m+n)=f(n)\times f(m)+f(n)+f(m)$.

1) On suppose qu'une telle fonction f existe.

a) Calculer $f(0)$ (on pourra poser $n=0$ et $m=1$).

b) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(6)$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1)=2f(n)+1$.

3) On pose pour tout entier naturel n, $g(n)=f(n)+1$.

Montrer que, pour tous entiers naturels m et n, $g(n+m)=g(n)\times g(m)$.

4) Donner une fonction f qui répond au problème.

Corrigé

1. a) $f(1)=f(1+0)=f(1)\times f(0)+f(1)+f(0)\Rightarrow 1=1+2f(0)\Rightarrow f(0)=0$

b) $f(2)=f(1+1)=f(1)\times f(1)+f(1)+f(1)\Rightarrow \boxed{f(2)=3}$

$f(3)=f(2+1)=f(1)\times f(2)+f(1)+f(2)=1\times 3+1+3\Rightarrow \boxed{f(3)=7}$

$f(6)=f(3+3)=f(3)\times f(3)+f(3)+f(3)=7^2+2\times 7\Rightarrow \boxed{f(6)=63}$

2) $f(n+1)=f(n)\times f(1)+f(n)+f(1)=2f(n)+1$

3) On a : $g(n+m)=f(n+m)+1=f(n)\times f(m)+f(n)+f(m)+1=f(m)\big(f(n)+1\big)+f(n)+1$

$\Rightarrow g(n+m)=\big(f(n)+1\big)\big(f(m)+1\big)=g(n)\times g(m)$

4) $g(n+1)=g(n)\times g(1)\Rightarrow g(n+1)=f(n+1)+1=2f(n)+2=2\big(f(n)+1\big)=2g(n)$

Alors $g(n)$ est une suite géométrique de raison 2, et de premier terme $g(0)=f(0)+1=1$ d'où $g(n)=2^n$ d'où $\boxed{f(n)=2^n-1}$.

Fin.