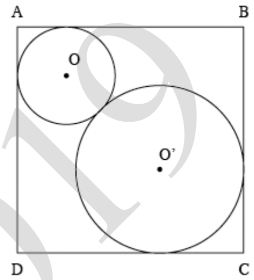
Phase 2 **Olympiades Nationales de Mathématiques 2019** **Niveau 7C**

Corrigé du sujet

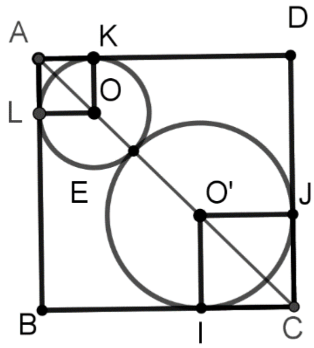
proposé par AMIMATHS

Exercice 1 : (20 points)



Soit ABCD un carré de coté a. Un cercle $\Gamma(O,r)$ intérieur au carré est tangent à (AB) et (AD). Un second cercle $\Gamma'(O',r')$, intérieur au carré, est tangent extérieurement à Γ ainsi qu'aux droites (CB) et (CD). Soit S la somme des aires des cercles Γ et Γ'.
1° Exprimer $r+r'$ en fonction de a.
2° Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

Corrigé



1° Exprimer $r+r'$ en fonction de a.
Les centres O et O' des cercles étant à égale distance des côtés AB et AD pour l'un et des côté CB et CD pour l'autre, les centres des deux cercles sont situés sur la diagonale $[AC]$ et les rayons r et r' des cercles vérifient

$OA+r+r'+OC=a\sqrt{2}$ or $OA=r\sqrt{2}$ et $O'C=r'\sqrt{2}$ d'où
$(r+r')(1+\sqrt{2}) = a\sqrt{2}$ donc $r+r' = a(2-\sqrt{2})$.

2° Quelles sont les valeurs maximale et minimale de S ?

La somme des aires des deux cercles est $S=\pi(r^2+r'^2)=\frac{\pi}{2}\left[(r+r')^2+(r-r')^2\right]$

donc

$$S=\frac{\pi}{2}\left[\left(6-4\sqrt{2}\right)a^2+(r-r')^2\right].$$

Barème :

1° $OA=r\sqrt{2}$	5
$O'C=r'\sqrt{2}$	5
2° valeur de S	4
S_{min} et S_{max}	4
Présentation, rédaction et idées	2

Les cercles étant situés à l'intérieur du carré de coté a, leurs rayons restent inférieurs à $\frac{a}{2}$. On en déduit que si $r=\frac{a}{2}$ alors $r'=a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ donc chaque rayon appartient à l'intervalle $\left[a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right),\frac{a}{2}\right]$.

On a $S=\frac{\pi}{2}\left[\left(6-4\sqrt{2}\right)a^2+(r-r')^2\right]$. On en déduit immédiatement que cette aire est minimale quand $r=r' = a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et vaut alors $S=S_{min}=\pi\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2$. Et qu'elle est maximale quand r est maximal et r' minimal (ou inversement) c'est-à-dire quand $r=\frac{a}{2}$ et $r'=\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)a$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} S=S_{max} &= \frac{\pi}{2}\left[\left(6-4\sqrt{2}\right)\times a^2+\left(-1+\sqrt{2}\right)^2\times a^2\right] \\ &= \pi\left[\frac{9}{2}-3\sqrt{2}\right]a^2 \end{aligned}$$

Exercice 2 ; (20 points)

On se propose de déterminer tous les entiers n pour lesquels $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier. Si tel est le cas on pose $k=\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$.

1° Montrer que $4k^2n=k^4+5\times24^2$.
2° En déduire qu'il existe un entier m tel que $km=24$.
3° Montrer que k est un entier pair.
4° En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier.

Corrigé

1° $k=\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}} \Rightarrow k^2=2n-2\sqrt{n^2-5\times12^2} \Rightarrow 2n-k^2=2\sqrt{n^2-5\times12^2} \Rightarrow$
$(2n-k^2)^2=4(n^2-5\times12^2) \Rightarrow 4n^2-4nk^2+k^4=4n^2-4\times5\times12^2 \Rightarrow$
$4k^2n=k^4+4\times5\times12^2=k^4+5\times24^2$

2° On a $4k^2n=k^4+5\times24^2 \Rightarrow k(4nk-k^3)=5\times24^2=(5\times24)\times24$ ce qui montre que k divise 24. D'où l'existence d'un entier m tel que $km=24$.

3° $k^4=4nk^2-5\times24^2 \Rightarrow k^4=2(2nk^2-5\times2\times12^2) \Rightarrow 2|k^4 \Rightarrow 2|k$, d'où k est un entier pair.

Barème :	
1°	5
2°	4
3°	4
4°	4
Présentation, rédaction et idées	3

4° Si k est un entier alors il serait un diviseur pair de 24, donc $k\in\{2;4;6;8;12;24\}$
Or on a $4k^2n=k^4+5\times24^2$ et $km=24$ ce qui montre que $4k^2n=k^4+5\times k^2m^2 \Rightarrow 4n=k^2+5m^2$

- ⇨ $k=2 \Rightarrow m=12 \Rightarrow 4n=2^2+5\times12^2 \Rightarrow n=181$
- ⇨ $k=4 \Rightarrow m=6 \Rightarrow 4n=4^2+5\times6^2 \Rightarrow n=49$
- ⇨ $k=6 \Rightarrow m=4 \Rightarrow 4n=6^2+5\times4^2 \Rightarrow n=29$
- ⇨ $k=8 \Rightarrow m=3 \Rightarrow 4n=8^2+5\times3^2=109$ ce qui est impossible car 4 ne divise pas 109.
- ⇨ $k=12 \Rightarrow m=2 \Rightarrow 4n=12^2+5\times2^2 \Rightarrow n=41$
- ⇨ $k=24 \Rightarrow m=1 \Rightarrow 4n=24^2+5\times1^2=581$ ce qui est impossible car 4 ne divise pas 581.

Alors $\sqrt{n+12\sqrt{5}}-\sqrt{n-12\sqrt{5}}$ est un entier si et seulement si $n\in\{29;41;49;181\}$

Exercice 3 : (20 points)

Soit n un nombre naturel. Notons P_n la propriété : « n^2-1 est multiple de 12 ».
1° Montrer que P_n est vraie si n est un nombre premier autre que 2 ou 3.
2° Donner un exemple de nombre composé (c'est-à-dire non premier) n pour lequel P_n est vraie et un autre pour lequel P_n est fausse.
3° Si n est composé, à quelle condition sur n la propriété P_n est-elle vraie ?

Corrigé

1° n est premier différent de 2 et 3 donc n est impair et par suite $n-1$ et $n+1$ sont tous les deux pairs. On en déduit que $(n-1)(n+1)=n^2-1$ est divisible par 4. Les entiers $n-1$, n et $n+1$ sont consécutifs donc l'un d'eux est divisible par 3. Comme n est premier différent de 3 alors 3 va diviser $n-1$ ou $n+1$ et donc 3 divise $n^2-1=(n-1)(n+1)$. 4 et 3 sont premiers entre eux et divisent n^2-1 donc leur produit $3\times4=12$ divise n^2-1.

2° Pour $n=25$ on a $n^2-1=625-1=624=12\times52$, vérifie P_n.
Pour $n=6$ on a $n^2-1=36-1=35$ non divisible par 12 ne vérifie pas P_n.

Barème :	
1°	8
2°	4
3°	4
Présentation, rédaction et idées	4

3° La condition pour qu'un entier composé vérifie P_n est que n ne soit pas divisible par 2 ni, par 3.

En effet si n était pair alors $n-1$ et $n+1$ seraient impairs et donc 12 ne divise pas n^2-1. Si n était un multiple de 3 alors $n-1$ et $n+1$ ne seraient pas divisibles par 3 et donc 12 ne divise pas n^2-1.

Exercice 4 : (20 points)

Soit p et q deux nombres rationnels strictement positifs. Pour tout $x \in [0;1[$, on pose, $f_{p\,;\,q}(x) = \int_0^x t^p (1-t)^q \, dt$.

1° a) Montrer que $(1+p)f_{p\,;\,q}(x) - qf_{p+1\,;\,q-1}(x) = x^{p+1}(1-x)^q$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

2°) Montrer que : $(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x) - pqf_{p-1\,;\,q-1}(x) = x^p(1-x)^q((p+q)x-q)$

Corrigé

1° a) $\begin{cases} u' = t^p \\ v = (1-t)^q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{p+1} t^{p+1} \\ v' = -q(1-t)^{q-1} \end{cases} \Rightarrow (1+p)f_{p\,;\,q}(x) = \left[t^{p+1}(1-t)^q \right]_0^x + qf_{p+1\,;\,q-1}(x)$

$\Rightarrow (1+p)f_{p\,;\,q}(x) - qf_{p+1\,;\,q-1}(x) = x^{p+1}(1-x)^q$

b) On a $\int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = f_{n;n}(1)$ or $(1+n)f_{n\,;\,n}(1) = nf_{n+1\,;\,n-1}(1) \Rightarrow f_{n\,;\,n}(1) = \frac{n}{n+1} f_{n+1\,;\,n-1}(1)$.

On démontre facilement par itération ou par récurrence que $\int_0^1 t^n (1-t)^n \, dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$

Barème :	
1°a)	5
b)	4
2°a)	8
Présentation, rédaction et idées	3

2° a) On a $(1+p)f_{p\,;\,q}(x) - qf_{p+1\,;\,q-1}(x) = x^{p+1}(1-x)^q$.

Or $f_{p+1\,;\,q-1}(x) = \int_0^x t^{p+1}(1-t)^{q-1} \, dt = \int_0^x t^p (1-t)^{q-1}(1-(1-t))dt$

$\Rightarrow \int_0^x t^p (1-t)^{q-1} \, dt - \int_0^x t^p (1-t)^q \, dt = f_{p\,;\,q-1}(x) - f_{p\,;\,q}(x)$

D'où $(1+p)f_{p\,;\,q}(x) = q\left(f_{p\,;\,q-1}(x) - f_{p\,;\,q}(x)\right) + x^{p+1}(1-x)^q$

$\Rightarrow (1+p+q)f_{p\,;\,q}(x) = qf_{p\,;\,q-1}(x) + x^{p+1}(1-x)^q \qquad (1)$

Or d'après 1° on a $qf_{p\,;\,q-1}(x) = pf_{p-1\,;\,q}(x) - x^p(1-x)^q$ et $f_{p-1\,;\,q}(x) = f_{p-1\,;\,q-1}(x) - f_{p\,;\,q-1}(x)$.

D'où $(p+q)f_{p\,;\,q-1}(x) = pf_{p-1\,;\,q-1}(x) - x^p(1-x)^q \qquad (2)$

Donc : $(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x) - pqf_{p-1\,;\,q-1}(x) = x^p(1-x)^q((p+q)x-q)$

En multipliant (1) par $p+q$ et en utilisant (2), on trouve que :

$(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x) = q(p+q)f_{p\,;\,q-1}(x) + (p+q)x^{p+1}(1-x)^q$

$\Rightarrow (p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x) = q\left(pf_{p-1\,;\,q-1}(x) - x^p(1-x)^q\right) + (p+q)x^{p+1}(1-x)^q$

D'où $(p+q)(1+p+q)f_{p\,;\,q}(x) - pqf_{p-1\,;\,q-1}(x) = x^p(1-x)^q((p+q)x-q)$

Exercice 5 : (20 points)

Soit ABC un triangle dont les longueurs des côtés sont toutes différentes : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On note Δ_a la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ et δ_a sa bissectrice extérieure.

1° I_a et J_a sont les points d'intersection de (BC) respectivement avec Δ_a et δ_a.

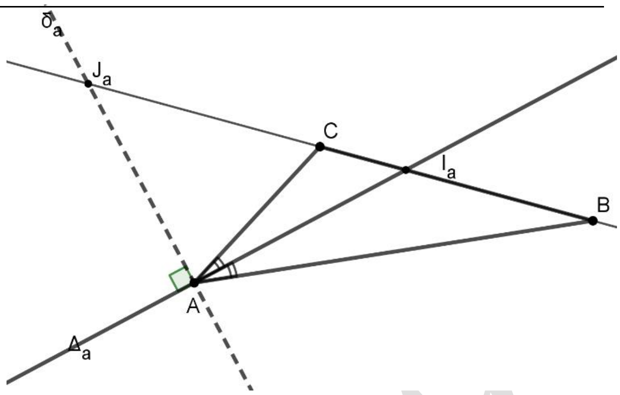
a) Calculer de deux manières différentes les aires des triangles ABI_a et ACI_a.

b) En déduire que : $I_a = \text{bar}\{(B,b);(C,c)\}$. Montrer aussi que : $J_a = \text{bar}\{(B,-b);(C,c)\}$.

2° Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Montrer que : $I = \text{bar}\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

3° Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, N un point du segment $[AB]$ et P le point du segment $[BC]$ tels que : $AN = CP$. Les droites (AP) et (CN) se coupent en Q. Montrer que la droite (DQ) est bissectrice de l'angle ADC.

Corrigé



1° a) Chaque point de la bissectrice est à équidistant des deux côtés.
Soit $d = d\left(I_a,(AB)\right) = d\left(I_a,(AC)\right)$. Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
L'aire A_1 du triangle ABI_a est telle que $2A_1 = BI_a \times AH = AB \times d$
L'aire A_2 du triangle ACI_a est telle que $2A_2 = CI_a \times AH = AC \times d$

b) Le calcul du rapport donne : $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{BI_a}{CI_a} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{c}{a}$.

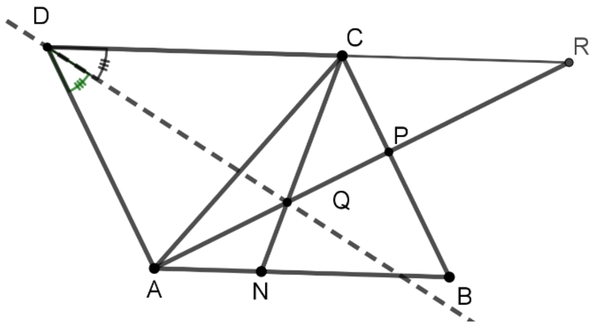
Alors : $\begin{cases} aBI_a = cCI_a \\ I_a \in [BC] \end{cases}$ c'est-à-dire que : $I_a = \text{bar}\left\{(B,b);(C,c)\right\}$.

De même on montre que $\begin{cases} aBJ_a = cCJ_a \\ J_a \notin [BC] \text{ et } J_a \in (BC) \end{cases}$ c'est-à-dire que $J_a = \text{bar}\left\{(B,-b);(C,c)\right\}$.

Barème :	
1°a)	**6**
b)	**4**
2°	**4**
3°	**3**
Présentation, rédaction et idées	**3**

2° Les points jouant le même rôle, on considère I_b intersection de la bissectrice intérieure de B avec (AC). Alors $I_b = \text{bar}\left\{(A,a);(C,c)\right\}$. Par associativité le barycentre du système $\left\{(A,a);(B,b);(C,c)\right\}$ est à l'intersection des bissectrices (AI_a) et (BI_b). C'est donc le point I intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC. Alors $I = \text{bar}\left\{(A,a);(B,b);(C,c)\right\}$.

3° Soit R l'intersection des droites (AP) et (CD). Pour montrer que (DQ) est bissectrice de l'angle D il suffit de montrer que $Q = \left\{(A,DR);(C,AD)\right\}$ (cf 1° b)).



Dans le triangle ARD on a : $\begin{cases} C \in (DR) \\ P \in (AR) \\ (CP) \parallel (AD) \end{cases}$, d'après Thalès on a : $\dfrac{RC}{DR} = \dfrac{CP}{AD}$ ou encore $\dfrac{RC}{DR} \times AD = CP$.

On a aussi : $\begin{cases} Q \in (CN) \\ Q \in (AR) \\ (CR) \parallel (AN) \end{cases}$, d'après Thalès on a : $\dfrac{QA}{QR} = \dfrac{AN}{CR}$ ou encore $\dfrac{QA}{QR} \times CR = AN$.

Mais $AN = CP$ et par suite $\dfrac{QA}{QR} \times CR = \dfrac{RC}{DR} \times AD$. En simplifiant par CR on trouve :

$\dfrac{QA}{QR} = \dfrac{AD}{DR}$. Alors : $\begin{cases} AD \times QR = DR \times QA \\ Q \in [AR] \end{cases}$ c'est-à-dire que : $Q = \text{bar}\left\{(A,DR);(R,AD)\right\}$. Ce qu'il fallait démontrer.

Fin