Corrigé proposé par AMIMATHS

Pour chaque exercice :
- **Toute réponse complète apporte 25 points.**
- **Si la réponse est incomplète on applique le barème correspondant à cet exercice**

Exercice 1 (25 points)

Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $a+b+c+d=0$. On pose $N=(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)$

1) Montrer que $bc-ad=(a+c)(a+b)$

2) On suppose que a, b, et c sont des entiers naturels,

a) Montrer que $(a+b)(b+c)(c+a)$ est un nombre pair.

b) Déterminer la valeur de N sachant que $2024\le N\le 2224$

Solution

Barème :	
1° d = -a –b –c	3pts
1) Factorisation	6pts
2.a) parité	4pts
b.) Factorisation	3pts
Carré parfait	3pts
Valeur de N	4pts
Présentation	2pts

1) Puisque $a+b+c+d=0$ alors $d=-a-b-c$

Donc

$$bc-ad=bc-a(-a-b-c)=bc+a(a+b+c)$$
$$=b(a+c)+a(a+c)=(a+c)(a+b)$$

2) Parmi les entiers a, b et c, deux au moins sont de la même parité alors l'un au moins des sommes $(a+b)$, $(b+c)$ et $(c+a)$ est paire et par conséquent $(a+b)(b+c)(c+a)$ est pair.

3) On a $bc-ad=(a+c)(a+b)$.

De même $ac-bd=(b+c)(b+a)$ et $ab-cd=(c+a)(c+b)$

Donc

$$N=(bc-ad)(ac-bd)(ab-cd)=(a+c)(a+b)(b+c)(b+a)(c+a)(c+b)=\left((a+c)(a+b)(b+c)\right)^2$$

Alors N est un carré parfait d'un nombre pair et $2024\le N\le 2224$, or les carrés parfaits compris entre 2024 et 20224 sont 45^2 , 46^2 et 47^2 donc $N=46^2=2116$

Exercice 2 (25 points)

Soient a, b et c des nombres réels tels que $|a-b|=1$, $|b-c|=1$ et $|c-a|=2$

1. Montrer que $a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc=2$ et déduire que $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{3}{abc}$

2. Factoriser l'expression $a^2-ac-ab+bc$ puis déduire la valeur de

$$\frac{1}{a^2-ac-ab+bc}+\frac{2}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{1}{c^2-ac-bc+ba}$$

Solution

Barème :	
1. $(a-b)^2+(b-c)^2=2$	5pts
La Somme	6pts
2. Factorisation	4pts
Autres factorisations	2pts
La somme	5pts
Présentation	3pts

1. $$a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc=a^2-2ab-b^2+b^2-2bc+c^2$$
$$=(a-b)^2+(b-c)^2=2$$

La somme

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\frac{c^2}{abc}-\frac{bc}{abc}-\frac{ac}{abc}-\frac{ab}{abc}$$
$$=\frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{abc}$$
$$=\frac{2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc}{2abc}$$
$$=\frac{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)}{2abc}=$$
$$=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2abc}=\frac{1^2+1^2+2^2}{2abc}=\frac{3}{abc}$$

2) Factoriser de l'expression $a^2-ac-ab+bc$

$$a^2-ac-ab+bc=a(a-c)-b(a-c)=(a-b)(a-c)$$

alors

$$\frac{1}{a^2-ac-ab+bc}+\frac{2}{b^2-ab-bc+ac}+\frac{1}{c^2-ac-bc+ba}=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{2}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{c-b-2(c-a)-(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{-1}{(a-b)(b-c)}=\frac{-1}{1}=-1$$

(En effet comme $|a-b|+|b-c|=|c-a|$, alors $(a-b)$ et $(b-c)$ ont le même signe $(a-b)(b-c)=1$)

<u>Exercice 3</u> (25 point)

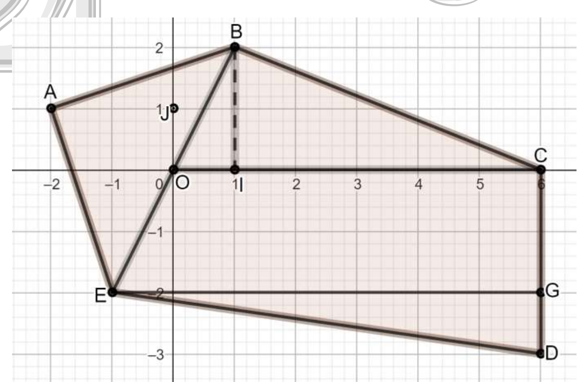
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points $A(-2;1)$, $B(1;2)$, $C(6;0)$, $D(6;-3)$ et $E(-1;-2)$.

1) Placer les points A, B, C, D et E.

2) Calculer l'aire du pentagone ABCDE.

<u>Solution</u>

1)<u>2) Aire du pentagone ABCDE</u>



Soit $G(6;-2)$; S : aire du pentagone ABCDE ; A_1 aire du triangle ABE ; A_2 aire du triangle OBC ; A_3 aire du triangle DEG ; A_4 aire du trapèze OCGE.

$$S=A_1+A_2+A_3+A_4$$

Calcul de A_1 :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(-2)\\2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$$
$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}x_E-x_A\\y_E-y_A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-(-2)\\-2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow AE=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$$

Barème :	
1. Figure	5pts
2. Choix du découpage	7pts
Validité de la démarche	7pts
Résultat 27,5	3pts
Présentation	3pts

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont orthogonaux car $3\times1+1\times(-3)=3-3=0$, donc le triangle ABE est rectangle A d'où

$$A_1=\frac{AB\times AE}{2}=\frac{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{2}=\frac{10}{2}\Rightarrow A_1=5$$

Calcul de A_2 :

$$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} x_I - x_B \\ y_I - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow BI = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} x_C - x_O \\ y_C - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow OC = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

$(OC) \perp (BI)$ **et** $I \in (OC)$ **donc** $A_2 = \dfrac{OC \times BI}{2} = \dfrac{6 \times 2}{2} \Rightarrow A_2 = 6$

Calcul de A_3 :

On a $y_G = y_E \Rightarrow (GE)//(OI) \Rightarrow GE = 7$ **et** $x_G = x_D \Rightarrow (GD)//(OJ)$

Comme $(OI) \perp (OJ)$**, alors** $(GE) \perp (GD)$

$GD = 1$ **donc** $A_3 = \dfrac{GE \times GD}{2} = \dfrac{7 \times 1}{2} \Rightarrow A_3 = 3,5$.

Calcul de A_4 :

$C(6;0) \in (OI) \Rightarrow OC = 6$ **et** $y_G = y_E \Rightarrow (GE)//(OC)$

On a : $x_G = x_C \Rightarrow (GC)//(OJ)$ **et** $GC = 2$

Comme $(OI) \perp (OJ)$**, alors** $(OI) \perp (GC) \Rightarrow (OC) \perp (GC)$

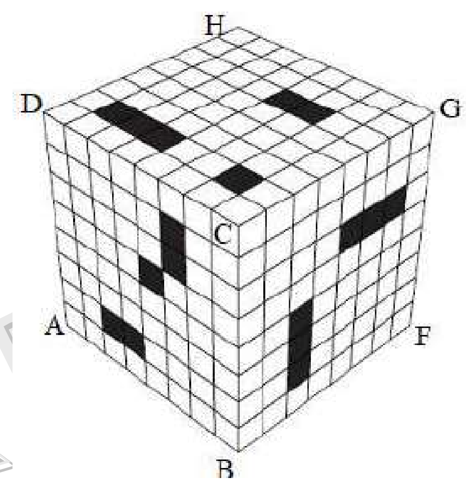
Donc le quadrilatère OCGE est un trapèze rectangle de bases $[OC]$ et $[GE]$ et de hauteur $[GC]$ d'où

$$A_4 = \frac{(OC + GE) \times GC}{2} = \frac{(6+7) \times 2}{2} \Rightarrow A_4 = 13$$

Calcul de S :

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 5 + 6 + 3,5 + 13 \Rightarrow S = 27,5$$

<u>Exercice 4</u> (25 points)
Dans la figure ci- contre, ABCDEFGH est un cube dans lequel toutes les rangées aux extrémités de couleur noire sont constituées de petits cubes noirs ; tous les autres petits cubes sont blancs. Quel est le nombre total des petits cubes blancs dans le cube ABCDEFGH ?



Le grand cube est composé de 512 petits cubes.

Il ya 17 rangées de petits cubes noirs (soit 136 petits cubes).

Parmi ces 136 petits cubes noirs:
9 petits cubes noirs sont comptés 2 fois.
1 petit cube noir est compté trois fois.
Donc le nombre de petits cubes blancs est :

$$512 - (136 - (9 + 2 \times 1)) = 387$$

Barème :	
Nombre total de petits cubes	5pts
Nombre de cubes dans les 17 rangées	7pts
Nbr de cubes dans l'intersection des rangées	5pts
Résultat 387	5pts
Présentation	3pts

Fin.