Corrigé proposé par AMIMATHS

Pour chaque exercice :

- ***Toute réponse complète apporte 20 points.***
- ***Si la réponse est incomplète on applique le barème correspondant à cet exercice***

Exercice 1 (20 points)

Montrer que pour tout entier naturel non nul, $M^n=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times 2^n-3 & 4-3\times 2^n\end{pmatrix}$ **avec** $M=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

Corrigé

Procédons par récurrence.

Initialisation : Pour $n=1$ **on a** $M=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-3 & 4-8\\ 6-3 & 4-6\end{pmatrix}\Rightarrow M^1=\begin{pmatrix}2^{1+2}-3 & 4-2^{1+2}\\ 3\times 2^1-3 & 4-3\times 2^1\end{pmatrix}$ **alors la proposition est vraie pour** $n=1$

Hérédité : si $M^n=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times 2^n-3 & 4-3\times 2^n\end{pmatrix}$ **alors**

$$\begin{aligned}M^{n+1}&=M\times M^n\\ &=\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times 2^n-3 & 4-3\times 2^n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}5\times 2^{n+2}-15-12\times 2^n+12 & 20-5\times 2^{n+2}-16+12\times 2^n\\ 3\times 2^{n+2}-9-6\times 2^n+6 & 12-3\times 2^{n+2}-8+6\times 2^n\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}2^{n+3}-3 & 4-2^{n+3}\\ 3\times 2^{n+1}-3 & 4-3\times 2^{n+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc si la proposition est vraie pour n **alors elle serait vraie pour** $n+1$

Conclusion :

Pour tout entier naturel non nul, $M^n=\begin{pmatrix}2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2}\\ 3\times 2^n-3 & 4-3\times 2^n\end{pmatrix}$

Barème Exercice 1	
Pertinence de la méthode	*4 pts*
Exactitude du raisonnement	*5 points*
Exactitude du calcul	*8 pts*
Présentation	*3 pts*

Exercice 2 20 points

Résoudre le système $\begin{cases}x^2=y+z\\ y^2=z+x\\ z^2=x+y\end{cases}$

Corrigé

On a $(1)\,\&\,(2)\Rightarrow x^2-y^2=y-x\Rightarrow(x-y)(x+y+1)=0\Rightarrow x=y$ **ou** $x+y=-1$

1^{er} cas : $x+y=-1\Rightarrow z^2=-1\Rightarrow z=\pm i$

- **Si** $z=i$ **alors** $x^2+y^2=-1+2i$ **et on a** $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-(-1+2i)\right]=1-i$

  Alors x et y sont solutions de l'équation $t^2+t+1-i=0$ **dont les solutions sont i et** $-1-i$
  Dans ce cas les solutions sont $(i;-1-i;i)$ **et** $(-1-i;i;i)$

- **Si** $z=-i$ **alors** $x^2+y^2=-1-2i$ **et** $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]=\frac{1}{2}\left[1-(-1-2i)\right]=1+i$

  Alors x et y sont solutions de l'équation $t^2+t+1+i=0$
  dont les solutions sont $-i$ **et** $-1+i$
  Dans ce cas les solutions sont $(-i;-1+i;-i)$ **et** $(-1+i;-i;-i)$

Barème Exercice 2	
Pertinence de la méthode	*4 pts*
Discussion des cas	*5 pts*
Exactitude du calcul	*8 pts*
Présentation	*3 pts*

2^e cas : Si $y = x$ alors le système s'écrit

$$\begin{cases} x^2 = x + z \\ z^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2 - x \\ (x^2 - x)^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2 - x \\ x^4 - 2x^3 + x^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2 - x \\ x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

- **Si $x = 0$ alors le système admet une seule solution $(x, y, z) = (0,0,0)$**
- **Si $x \neq 0$ alors le système s'écrit** $\begin{cases} z = x^2 - x \\ (x-2)(x^2+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x^2 - x \\ x = 2 \text{ ou } x = \pm i \end{cases}$
  - **Pour $x = 2$ on aura $z = 2$**
  - **Pour $x = i$ on aura $z = -1 - i$**
  - **Pour $x = -i$ on aura $z = -1 + i$**

Conclusion : le système admet huit solutions

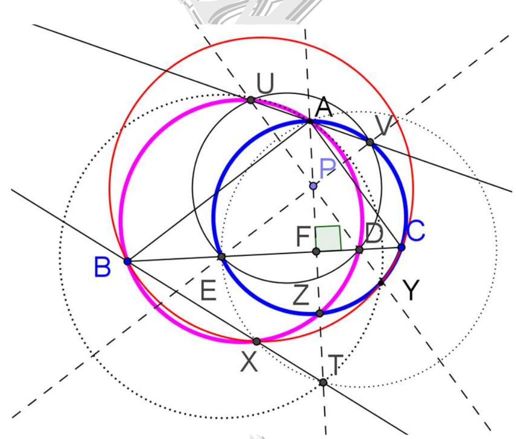
$\{(i;-1-i;i),(-1-i;i;i),(-i;-1+i;-i),(-1+i;-i;-i),(0;0;0),(2;2;2),(i;i;-1-i),(-i;-i;-1+i)\}$

<u>Exercice 3 (20 points)</u>

Dans le triangle à angle aigu ABC, le point F est le pied de la hauteur issue de A, et P un point du segment $[AF]$. Les parallèles à (AC) et (AB) passant par P rencontrent respectivement [BC] en D et E. On considère les points X et Y appartenant respectivement aux cercles circonscrits aux triangles ABD et ACE tels que $DA = DX$ et $EA = EY$.

Montrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Corrigé



On note U le second point d'intersection de la droite (DP) avec le cercle circonscrit au triangle ABD. V le second point d'intersection de la droite (EP) avec le cercle circonscrit au triangle AEC et Z le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABD et AEC.

On a $\angle UAV = \angle UAB + \angle BAC + \angle CAV + 180°$ donc les points U, A et V sont alignés.

D'autre part $\angle UVE = \angle AVE = \angle ACE = \angle UDE$ donc les points U, E, D , V sont cocycliques d'où $PD.PU = PE.PV$ (puissance de point P par rapport au cercle passant par U, E, D , V)

D'après Thalès on a $\dfrac{FD}{FC} = \dfrac{FP}{FA} = \dfrac{FE}{FB} \Rightarrow FD.FB = FE.FC$ donc le point F appartient à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles ABD et AEC qui est (AZ).

D'où $Z \in (AP)$.

Notons T le point d'intersection des droites (AZ) et (BX).

Donc T et A sont symétriques par rapport à (BD), d'où $\angle ACB = \angle BCT$

D'autre part on

$\angle YCB = \angle YCE$	**alignement**
$= \angle YAE$	**cocyclicité AEYC**
$= \angle AYE$	**AEY isocèle en E**
$= \angle ACE$	**cocyclicité AEYC**
$= \angle ACB$	**alignement**
$= \angle BCT$	**resultat précédent**

<u>Barème Exercice 3</u>	
Figure	*5 pts*
Pertinence de la méthode	*4 pts*
Exactitude du raisonnement	*4 pts*
Achèvement de la démonstration	*4 pts*
Présentation	*3 pts*

Donc les points C, Y, T sont alignés et comme T appartient à l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles ABD et AEC alors on a $TX.TB = TZ.TA = TY.TC$ donc $TX.TB = TY.TC$ ce qui montre que X, B, Y, C sont cocycliques.

Exercice 4 (20 points)

Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs.

1° On suppose dans cette question que $a+b+c=1$. Montrer que $9\le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3+\frac{1}{4abc}$.

2° On suppose dans cette question que $ab^2c^3=1$. Déterminer la valeur minimale de $a+b+c$.

Corrigé

1° Montrer que $9\le \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le 3+\frac{1}{4abc}$ revient à montrer que $9abc\le ab+bc+ca\le 3abc+\frac{1}{4}$

Comme $a+b+c=1$ alors $ab+bc+ca=(ab+bc+ca)(a+b+c)$ et d'après l'IAG on a

$ab+bc+ca=(ab+bc+ca)(a+b+c)\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\times 3\sqrt[3]{abc}=9abc$ d'où la première inégalité $9abc\le ab+bc+ca$.

D'après la symétrie de rôles on peut supposer que $a\ge b\ge c$

donc $a\ge \frac{a+b+c}{3}=\frac{1}{3}\Rightarrow 3a\ge 1$ d'où $3abc\ge bc$

En plus $b+c=1-a$ et donc

$$ab+ac=a(b+c)=a(1-a)\le\left(\frac{a+(1-a)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

D'où $ab+bc+ca=bc+ab+ac\le \frac{1}{4}+bc\le \frac{1}{4}+3abc$

Barème Exercice 4	
Méthode & raisonnement approprié	*4 pts*
Question 1°	
Inégalité à gauche	*3 pts*
Inégalité à droite	*3 pts*
Question 2°	
Inégalité	*4 pts*
Cas d'égalité	*3 pts*
Présentation	*3 pts*

2° On peut écrire $a+b+c$ sous la forme $a+b+c=a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c+\frac{1}{3}c\ge 6\sqrt[6]{\frac{ab^2c^3}{2^2\times 3^3}}=\frac{6}{\sqrt[6]{108}}$.

Donc $a+b+c\ge \frac{6}{\sqrt[6]{108}}$.

Le cas d'égalité de l'IAG aura lieu si $a=\frac{1}{2}b=\frac{1}{3}c\Rightarrow b=2a$ et $c=3a\Rightarrow a+b+c=6a$ or

$ab^2c^3=1\Rightarrow 108a^6=1\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt[6]{108}}\Rightarrow a+b+c=\frac{6}{\sqrt[6]{108}}$

Donc la plus petite valeur de $a+b+c$ est $\frac{6}{\sqrt[6]{108}}$

Exercice 5 (20 points)

Soit $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$.

1° Calculer $f(x)+f(1-x)$.

2° Calculer la somme $S=\sum_{k=1}^{2023} f\left(\frac{k}{2024}\right)=f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2}{2024}\right)+\cdots+f\left(\frac{2023}{2024}\right)$.

Corrigé

1° $f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\frac{9^x}{9^x+3}+\frac{9}{9+3\times 9^x}=\frac{9^x+3}{9^x+3}=1$

2° $S=\left[f\left(\frac{1}{2024}\right)+f\left(\frac{2023}{2024}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2024}\right)+f\left(\frac{2022}{2024}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1011}{2024}\right)+f\left(\frac{1013}{2024}\right)\right]+f\left(\frac{1012}{2024}\right)$

Alors $S=1011+f\left(\frac{1}{2}\right)=1011+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+3}=1011+\frac{1}{2}=\frac{2023}{2}$

Barème Exercice 5	
Question 1°	*7 pts*
Question 2°	
Regroupement f(x)+f(1-x)	*5 pts*
Résultat	*5 pts*
Présentation	*3 pts*

Fin.