Olympiades Nationales de Mathématiques 2024

3^{eme} tour — Niveau 4AS — 24 mars 2024

Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1 (25 points)

Soit n un entier naturel.

1) Montrer que $n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$

2) Simplifier au maximum le nombre $y = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + 2024^3}$

3) Trouver l'entier naturel x tel que $\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + x^3} = 66$

Corrigé de l'Exercice 1

1) Montrons que $n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n(n+1)+n(n-1)}{2}\right)\left(\frac{n(n+1)-n(n-1)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n^2+n+n^2-n}{2}\right)\left(\frac{n^2+n-n^2+n}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2n^2}{2}\right)\left(\frac{2n}{2}\right) = n^2 \times n = n^3$$

2) $y = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots + 2024^3}$

Nous savons que $n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$

Pour $n = 1$, on a : $1^3 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1\times 0}{2}\right)^2$

Pour $n = 2$, on a : $2^3 = \left(\frac{2\times 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\times 1}{2}\right)^2$

Pour $n = 3$, on a : $3^3 = \left(\frac{3\times 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\times 2}{2}\right)^2$

Pour $n = 4$, on a : $4^3 = \left(\frac{4\times 5}{2}\right)^2 - \left(\frac{4\times 3}{2}\right)^2$

. . . .

. . . .

. . . .

Barème :

1) Développement et réduction	6 pts
2) Utilisation de 1) pour 1, 2 et 2024	6 pts
Simplification de y	4 pts
3) Ecritures et simplification	4 pts
Valeur de x	3 pts
Présentation et idées	2 pts

Pour n = 2023, on a : $2023^3 = \left(\frac{2023\times 2024}{2}\right)^2 - \left(\frac{2023\times 2022}{2}\right)^2$

Pour n = 2024, on a : $2024^3 = \left(\frac{2024\times 2025}{2}\right)^2 - \left(\frac{2024\times 2023}{2}\right)^2$

En additionnant les égalités précédentes membre à membre on obtient

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots\dots + 2024^3 = \left(\frac{2024\times 2025}{2}\right)^2$

D'où $y = \sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots\dots + 2024^3} = \sqrt{\left(\frac{2024\times 2025}{2}\right)^2} = \frac{2024\times 2025}{2}$

$y = 1012\times 2025 = 2\,049\,300$

3)

$1^3 = \left(\frac{1\times 2}{2}\right)^2 - \left(\frac{1\times 0}{2}\right)^2$

$2^3 = \left(\frac{2\times 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\times 1}{2}\right)^2$

$3^3 = \left(\frac{3\times 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\times 2}{2}\right)^2$

$4^3 = \left(\frac{4\times 5}{2}\right)^2 - \left(\frac{4\times 3}{2}\right)^2$

. . . .

. . . .

. . . .

$(x-1)^3 = \left(\frac{(x-1)x}{2}\right)^2 - \left(\frac{(x-1)(x-2)}{2}\right)^2$

$x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{x(x-1)}{2}\right)^2$

En additionnant les égalités précédentes membre à membre on obtient

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots\dots + x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ **donc**

$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots\dots + x^3} = 66$

$\sqrt{\left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2} = 66$

$\frac{x(x+1)}{2} = 66$

$x(x+1) = 132 = 11\times 12$

Donc $x = 11$

Exercice 2: (25 points)

Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs tels que :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2}\ ; \qquad \frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{3}\ ; \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{4}.$$

1) Montrer que $\dfrac{2ab+2ac+2bc}{a+b+c}=9$

2) Montrer les égalités suivantes $\dfrac{2ab}{a+b+c}=1$; $\dfrac{2bc}{a+b+c}=5$ et $\dfrac{2ac}{a+b+c}=3$

3) Montrer que $a+b+c=\dfrac{529}{30}$

Corrigé de l'Exercice 2

Barème :

1)	7 pts
2)	9 pts
3)	7 pts
Présentation et idées	2pts

1) On a :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a+b+c}{ab+ac}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ab+ac}{a+b+c}=2$$

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c+a}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{a+b+c}{ab+bc}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{ab+bc}{a+b+c}=3$$

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{a+b}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{a+b+c}{ac+bc}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{ac+bc}{a+b+c}=4$$

Donc $\dfrac{ab+ac}{a+b+c}+\dfrac{ab+bc}{a+b+c}+\dfrac{ac+bc}{a+b+c}=2+3+4 \Rightarrow \dfrac{2ab+2ac+2bc}{a+b+c}=9$

2) Par soustraction $\dfrac{2ab+2ac+2bc}{a+b+c}-2\times\dfrac{ac+bc}{a+b+c}=9-2\times4 \Rightarrow \dfrac{2ab}{a+b+c}=1$

De même : $\dfrac{2ab+2ac+2bc}{a+b+c}-2\times\dfrac{ab+ac}{a+b+c}=9-2\times2 \Rightarrow \dfrac{2bc}{a+b+c}=5$

$$\frac{2ab+2ac+2bc}{a+b+c}-2\times\frac{ab+bc}{a+b+c}=9-2\times3 \Rightarrow \frac{2ac}{a+b+c}=3$$

3) Pour montrer que $a+b+c=\dfrac{529}{30}$**, on a :**

$$\frac{2ab}{a+b+c}\div\frac{2bc}{a+b+c}=1\div5 \Rightarrow c=5a$$

$$\frac{2bc}{a+b+c}\div\frac{2ac}{a+b+c}=5\div3 \Rightarrow b=\frac{5}{3}a$$

Or $\dfrac{2ac}{a+b+c}=3 \Rightarrow \dfrac{2a\times5a}{a+\frac{5}{3}a+5a}=3 \Rightarrow \dfrac{30a}{23}=3 \Rightarrow a=\dfrac{23}{10}$

Donc $b=\dfrac{5}{3}\times\dfrac{23}{10}=\dfrac{23}{6}$ **et** $c=5\times\dfrac{23}{10}=\dfrac{23}{2}$

Donc $a+b+c=\dfrac{23}{10}+\dfrac{23}{6}+\dfrac{23}{2}=\dfrac{529}{30}$.

Exercice 3 (25 points)

ABC est un triangle d'angles aigus tel que $\widehat{BAC} < \widehat{ACB}$ et D est un point de la droite (BC) n'appartenant pas à $[BC)$ tel que $BD = BA$. E est le point de la bissectrice de $\widehat{ABC}$ tel que $\widehat{ACB} = \widehat{BAE}$ et les segments $[EB]$ et $[AC]$ se coupent en un point noté F.

G est le point de $[AD]$ tel que (EG) soit parallèle à (BC)

1) Montrer que $\widehat{BFC} = \widehat{BEA}$ et déduire que $AE = AF$

2) Montrer que $\widehat{BAG} = \widehat{ABF}$ et déduire que (AG)//(BF).

3) Montrer que $\widehat{GEA} = \widehat{BAF}$

Corrigé de l'Exercice 3

1) Dans les triangles CFB et BEA :

$$\widehat{CBF} = \widehat{EBA} \text{ et } \widehat{FCB} = \widehat{EAB} \text{ donc } \widehat{BFC} = \widehat{BEA}$$

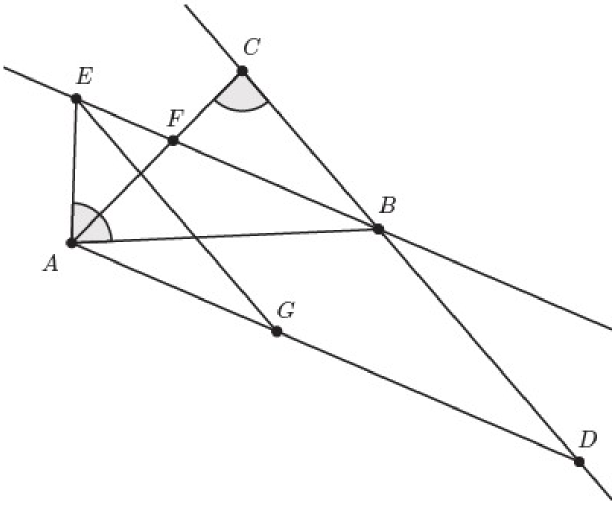
Barème :

1) $\widehat{BFC} = \widehat{BEA}$ ________ 5 pts
$AE = AF$ ________ 2 pts
2) $\widehat{BAG} = \widehat{ABF}$ ________ 5 pts
(AG)//(BF) ________ 3 pts
3) $\widehat{GEA} = \widehat{BAF}$ ________ 8 pts
Présentation et idées ________ 2 pts

Comme $\begin{cases} \widehat{BFC} = \widehat{BEA} \\ \widehat{BFC} = \widehat{AFE} : \text{ angles opposés par le sommet} \end{cases}$

Alors $\widehat{AFE} = \widehat{BEA}$

Donc le triangle AEF est isocèle en A et $AE = AF$



2) Montrons que $\widehat{BAG} = \widehat{ABF}$:

$$\widehat{BAG} = \widehat{CDA} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{ABD}\right) \text{ car ABD est isocèle}$$

$$= \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{ABF}$$

Puisque les angles $\widehat{BAG}$ et $\widehat{ABF}$ sont alternes internes égaux alors (AG) et (BF) sont parallèles.

3) Montrons que $\widehat{GEA} = \widehat{BAF}$:

$$\widehat{GEA} = 180° - \left(\widehat{EGA} + \widehat{EAB} + \widehat{BAG}\right) : \text{Dans le triangle EAG}$$

Comme $\widehat{EGA} = \widehat{CDA} = \widehat{ABF}$, on peut remplacer $\widehat{EGA}$ par $\widehat{ABF}$

$$\widehat{GEA} = 180° - \left(\widehat{ABF} + \widehat{FCB} + \widehat{ABF}\right)$$

$$= 180° - \left(\widehat{ABC} + \widehat{FCB}\right) : \text{car } 2\widehat{ABF} = \widehat{ABC}$$

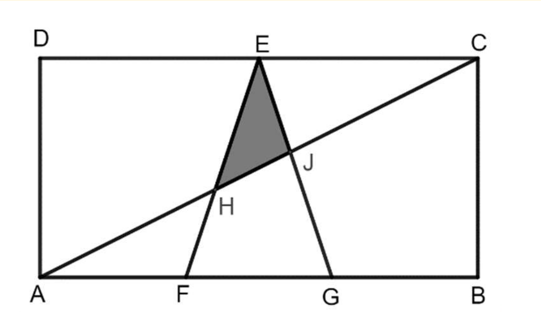
$$= \widehat{BAC} \qquad \text{dans le triangle ABC}$$

$$= \widehat{BAF}$$

Exercice 4 (25 points)

Sur la figure ci-contre : ABCD un rectangle d'aire 70 cm^2.

Le point E est le milieu de $[DC]$. $AF = FG = GB$.



1) Montrer que l'aire du triangle EFG est égal à $\dfrac{35}{3} cm^2$.

2) Montrer que $\dfrac{EH}{EF} = \dfrac{3}{5}$.

3) Montrer que $\dfrac{EJ}{EG} = \dfrac{3}{7}$.

4) Montrer que l'aire du triangle EHJ est égal à $3\ cm^2$.

Corrigé de l'Exercice 4

1) $A_{EFG} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}AB \times BC\right) = \dfrac{1}{6}AB \times BC = \dfrac{1}{6} \times 70 = \dfrac{70}{6} \Rightarrow A_{EFG} = \dfrac{35}{3}$ cm²

2) Les triangles HEC et HFA forment une configuration de Thales , donc

$$\frac{EH}{HF} = \frac{EC}{AF} \Rightarrow \frac{EH}{HF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{EH}{HF} == \frac{3}{2} \Rightarrow 2EH = 3HF \Rightarrow 2EH = 3(EF - EH) \Rightarrow 2EH = 3EF - 3EH$$

$$\Rightarrow 5EH = 3EF \Rightarrow \frac{EH}{EF} = \frac{3}{5}$$

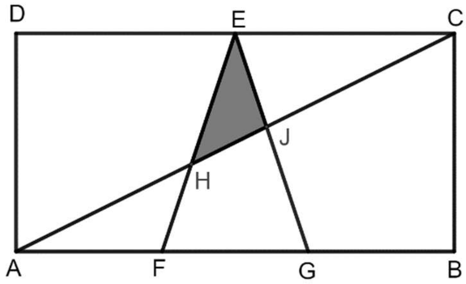
3) Les triangles JAG et JCE forment une configuration de Thales , donc

$$\frac{EJ}{JG} = \frac{EC}{AG} \Rightarrow \frac{JE}{JG} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \frac{EJ}{JG} == \frac{3}{4} \Rightarrow 4EJ = 3JG$$

$$\Rightarrow 4EJ = 3(EG - EJ) \Rightarrow 4EJ = 3EG - 3EJ \Rightarrow 7EJ = 3EG$$

$$\Rightarrow \frac{EJ}{EG} = \frac{3}{7}$$

Barème :	
1)	5 pts
2)	5 pts
3)	6 pts
4)	7 pts
Présentation et idées	2pts



4) Les triangles EHG et EHJ ont une hauteur commune issue de H donc

$$\frac{A_{EHJ}}{A_{EHG}} = \frac{EJ}{EG} \Rightarrow \frac{A_{EHJ}}{A_{EHG}} = \frac{3}{7} \qquad (1)$$

Les triangles EHG et EFG ont une hauteur commune issue de G donc

$$\frac{A_{EHG}}{A_{EFG}} = \frac{EH}{EF} \Rightarrow \frac{A_{EHG}}{A_{EFG}} = \frac{3}{5} \qquad (2)$$

$$(1)\times(2) \Rightarrow \frac{A_{EHJ}}{A_{EHG}} \times \frac{A_{EHG}}{A_{EFG}} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{A_{EHJ}}{A_{EFG}} = \frac{9}{35} \Rightarrow A_{EHJ} = \frac{9}{35} A_{EFG} \text{ or } A_{EFG} = \frac{35}{3}$$

Donc $A_{EHJ} = \dfrac{9}{35} \times \dfrac{35}{3} \Rightarrow A_{EHJ} = 3$ cm²

Fin.