

**Corrigé**  
proposée par AMIMATHS

**Exercice 1**

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels non nuls tels que :  $\frac{4x^2}{1+4x^2} = y$  ;  $\frac{4y^2}{1+4y^2} = z$  et  $\frac{4z^2}{1+4z^2} = x$

Montrer que  $x + y + z = \frac{3}{2}$

**Corrigé**

Pour tous nombres réels  $x, y$  et  $z$ , on a  $\frac{4x^2}{1+4x^2} > 0$  ;  $\frac{4y^2}{1+4y^2} > 0$  et  $\frac{4z^2}{1+4z^2} > 0$

$$x + y + z = \frac{4y^2}{1+4y^2} + \frac{4z^2}{1+4z^2} + \frac{4x^2}{1+4x^2}$$

$$x - \frac{4x^2}{1+4x^2} + y - \frac{4y^2}{1+4y^2} + z - \frac{4z^2}{1+4z^2} = 0$$

$$\frac{x(1+4x^2) - 4x^2}{1+4x^2} + \frac{y(1+4y^2) - 4y^2}{1+4y^2} + \frac{z(1+4z^2) - 4z^2}{1+4z^2} = 0$$

$$\frac{x(1-4x+4x^2)}{1+4x^2} + \frac{y(1-4y+4y^2)}{1+4y^2} + \frac{z(1-4z+4z^2)}{1+4z^2} = 0$$

$$\frac{x(1-2x)^2}{1+4x^2} + \frac{y(1-2y)^2}{1+4y^2} + \frac{z(1-2z)^2}{1+4z^2} = 0 \quad (*)$$

Comme  $x, y$  et  $z$  sont des réels strictement positifs,

$$1-2x = 1-2y = 1-2z = 0 \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{2} \Rightarrow x + y + z = \frac{3}{2}$$

Barème :

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| <b>Une réponse complète</b> | <b>25</b> |
| Signe de $x, y, z$          | 3         |
| Solution particulière       | 5         |
| Egalité (*)                 | 8         |
| Calcul de $x, y$ et $z$     | 5         |
| Présentation et idées       | 4         |

**Exercice 2**

Soit  $x$  et  $y$  deux nombres réels distincts tels que

$$x+1 = (y-1)^2 \text{ et } y+1 = (x-1)^2$$

1) On pose  $A = x + y$ . Trouver la valeur de  $A$ .

2) On pose  $B = \left( x + y - \frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{3}{x^2 + y^2} \right)^{2023}$ . Calculer  $B$ .

**Corrigé**

1) D'une part on a :

$$x+1 = (y-1)^2 \Leftrightarrow x+1 = y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow x+y = y^2 - y \rightarrow (1)$$

D'autre part :

$$y+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow y+1 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x+y = x^2 - x \rightarrow (2)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x+y = y^2 - y \\ x+y = x^2 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x = y^2 - y \Rightarrow x^2 - y^2 = x - y \Rightarrow (x-y)(x+y) = x - y$$

Et comme  $x \neq y$  alors  $x + y = 1 \Leftrightarrow \boxed{A=1}$

Barème :

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| <b>Une réponse complète</b> | <b>25</b> |
| 1) $A = 1$                  | 12        |
| 2) $B = -1$                 | 9         |
| Présentation et idées       | 4         |

2) De (1) et (2) on a  $\begin{cases} y^2 - y = x + y \\ x^2 - x = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x + 2y \\ x^2 = 2x + y \end{cases}$  ; donc  $x^2 + y^2 = 3x + 3y = 3(x + y)$

D'où

$$B = \left( x + y - \frac{x^2 + y^2}{3} - \frac{3}{x^2 + y^2} \right)^{2023}$$

$$B = \left( x + y - \frac{3(x + y)}{3} - \frac{3}{3(x + y)} \right)^{2023}$$

$$B = \left( x + y - (x + y) - \frac{1}{(x + y)} \right)^{2023} = (1 - 1 - 1)^{2023} = -1$$

### Exercice 3

Sur la figure ci-contre

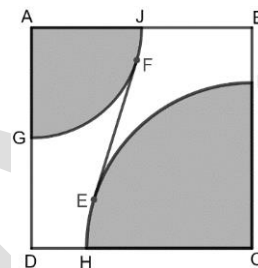
ABCD est un carré.

G est le milieu de [AD].

[EF] est tangent aux quarts des cercles

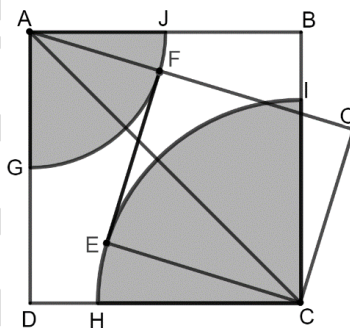
Sachant que  $AB = 4$  ;  $CH = 3$ .

Calculer EF



### Corrigé

- $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$
- Soit O le point d'intersection de (AF) et la parallèle à (EF) passant par C



$$(AF) \perp (EF) \Rightarrow (FO) \perp (EF) ;$$

$$(EC) \perp (EF) \text{ et } (OC) \parallel (EF) \text{ donc}$$

$$(EC) \perp (OC) ; \text{ alors le quadrilatère } OCEF$$

est un rectangle d'où  $FO = EC = 3$

$$AO = AF + FO = 2 + 3 = 5 \text{ et } OC = EF$$

- Le triangle ACO est rectangle en O

Donc, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AO^2 + OC^2 = AC^2$$

$$OC^2 = AC^2 - AO^2$$

$$EF^2 = (4\sqrt{2})^2 - 5^2 \text{ car } OC = EF$$

$$EF^2 = 32 - 25 = 7$$

$$EF = \sqrt{7}$$

Barème :

|                         |    |
|-------------------------|----|
| Une réponse complète    | 25 |
| Calcul de AC            | 5  |
| Figure et position de O | 6  |
| Calcul de EF            | 10 |
| Présentation et idées   | 4  |

### Exercice 4

Dans le tableau suivant chacune des lettres (a, b, c, d, e, f) désigne un chiffre (parmi 0, 1, 2, ..., 9). Les lettres identiques désignent des chiffres identiques et les lettres différentes désignent des chiffres différents. L'écriture ade désigne le nombre dont le chiffre des unités est e, celui des dizaines est d et celui des centaines est a.

On retrouve des nombres vérifiant les six opérations (verticales et horizontales) dans le tableau :

|           |   |           |   |            |
|-----------|---|-----------|---|------------|
| <b>ab</b> | × | <b>ac</b> | = | <b>ade</b> |
| ×         |   | -         |   | ÷          |
| <b>c</b>  | + | <b>af</b> | = | <b>ac</b>  |
| =         |   | =         |   | =          |
| <b>ce</b> | ÷ | <b>c</b>  | = | <b>Ab</b>  |

### Corrigé

On rappelle que l'écriture « ade » désigne un nombre de trois chiffres, dont le chiffre des unités est e, celui des dizaines est d et celui des centaines est a. Cette écriture ne présente pas un produit.

On rappelle aussi que deux lettres différentes désignent deux chiffres différents.

$$c + af = ac \Rightarrow f + c = c \Rightarrow f = 0$$

$$ab \times c = ce \Rightarrow \begin{cases} c \neq 0 \\ \frac{ce}{c} = ab \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{c} = a \Rightarrow a = 1 \\ \frac{e}{c} = b \Rightarrow \begin{cases} c \neq 1 \\ b < 5 \Rightarrow b \in \{2; 3; 4\} \\ b < e \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

➤ Si **b = 2**

|           |   |           |   |            |
|-----------|---|-----------|---|------------|
| <b>12</b> | × | <b>1c</b> | = | <b>1de</b> |
| ×         |   | -         |   | ÷          |
| <b>c</b>  | + | <b>10</b> | = | <b>1c</b>  |
| =         |   | =         |   | =          |
| <b>ce</b> | ÷ | <b>c</b>  | = | <b>12</b>  |

$$ce \div c = 12 \Rightarrow e + c = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \text{ et } e = 2 \text{ rejeté car } a = 1 \text{ et } b = 2 \\ c = 2 \text{ et } e = 4 \text{ rejeté car } b = 2 \\ c = 3 \text{ et } e = 6 \text{ accepté} \\ c = 4 \text{ et } e = 8 \text{ accepté} \end{cases}$$

|  |   |           |   |            |
|--|---|-----------|---|------------|
| <b>f = 0; a = 1; b = 2; c = 3 et e = 6</b> |   |           |   |            |
| ab × ac = ade                              |   |           |   |            |
| Mais ab × ac =                             |   |           |   |            |
| 12 × 13 = 156 = ade ⇒ d = 5                |   |           |   |            |
| <b>12</b>                                  | × | <b>13</b> | = | <b>156</b> |
| ×  |   | -         |   | ÷          |
| <b>3</b>                                   | + | <b>10</b> | = | <b>13</b>  |
| =  |   | =         |   | =          |
| <b>36</b>                                  | ÷ | <b>3</b>  | = | <b>12</b>  |

|  |   |           |   |            |
|--|---|-----------|---|------------|
| <b>f = 0; a = 1; b = 2; c = 4 et e = 8</b> |   |           |   |            |
| ab × ac = ade                              |   |           |   |            |
| Mais ab × ac =                             |   |           |   |            |
| 12 × 14 = 168 = ade ⇒ d = 6                |   |           |   |            |
| <b>12</b>                                  | × | <b>14</b> | = | <b>168</b> |
| ×  |   | -         |   | ÷          |
| <b>4</b>                                   | + | <b>10</b> | = | <b>14</b>  |
| =  |   | =         |   | =          |
| <b>48</b>                                  | ÷ | <b>4</b>  | = | <b>12</b>  |

#### Barème :

|                       |    |
|-----------------------|----|
| Solution complète     | 25 |
| f = 0                 | 3  |
| a = 1                 | 3  |
| 1 <sup>er</sup> cas   | 4  |
| 2 <sup>eme</sup> cas  | 4  |
| 3 <sup>eme</sup> cas  | 4  |
| 4 <sup>eme</sup> cas  | 4  |
| Présentation et idées | 3  |

➤ Si  $b = 3$

|    |   |    |   |     |  |    |   |    |   |     |
|----|---|----|---|-----|--|----|---|----|---|-----|
| 13 | × | 1c | = | 1de | $ce \div c = 13 \Rightarrow e \div c = 3 \Rightarrow$<br>$\left\{ \begin{array}{l} c = 1 \text{ et } e = 3 \text{ rejeté car } a = 1 \text{ et } b = 3 \\ c = 2 \text{ et } e = 6 \text{ accepté} \\ c = 3 \text{ et } e = 9 \text{ rejeté car } b = 3 \end{array} \right.$ D'où<br>$c = 2 \text{ et } e = 6$<br>$ab \times ac = 13 \times 12 = 156 = ade \Rightarrow d = 5$ | 13 | × | 12 | = | 156 |
| ×  |   | -  |   | ÷   |  | ×  |   | -  |   | ÷   |
| C  | + | 10 | = | 1c  |  | 2  | + | 10 | = | 12  |
| =  |   | =  |   | =   |  | =  |   | =  |   | =   |
| Ce | ÷ | c  | = | 13  |  | 26 | ÷ | 2  | = | 13  |

➤ Si  $b = 4$

|    |   |    |   |     |  |    |   |    |   |     |
|----|---|----|---|-----|--|----|---|----|---|-----|
| 14 | × | 1c | = | 1de | $ce \div c = 14 \Rightarrow e \div c = 4 \Rightarrow$<br>$\left\{ \begin{array}{l} c = 1 \text{ et } e = 4 \text{ rejeté car } a = 1 \text{ et } b = 4 \text{ D'où} \\ c = 2 \text{ et } e = 8 \text{ accepté} \end{array} \right.$<br>$c = 2 \text{ et } e = 8.$<br>$ab \times ac = 14 \times 12 = 168 = ade \Rightarrow d = 6$ | 14 | × | 12 | = | 168 |
| ×  |   | -  |   | ÷   |  | ×  |   | -  |   | ÷   |
| c  | + | 10 | = | 1c  |  | 2  | + | 10 | = | 12  |
| =  |   | =  |   | =   |  | =  |   | =  |   | =   |
| ce | ÷ | c  | = | 14  |  | 28 | ÷ | 2  | = | 14  |

Donc les cas possibles sont :

| 1 <sup>er</sup> cas |   |    |   |     | 2 <sup>eme</sup> cas |   |    |   |     | 3 <sup>eme</sup> cas |   |    |   |     | 4 <sup>eme</sup> cas |   |    |   |     |
|---------------------|---|----|---|-----|----------------------|---|----|---|-----|----------------------|---|----|---|-----|----------------------|---|----|---|-----|
| 12                  | × | 13 | = | 156 | 12                   | × | 14 | = | 168 | 13                   | × | 12 | = | 156 | 14                   | × | 12 | = | 168 |
| ×                   |   | -  |   | ÷   | ×                    |   | -  |   | ÷   | ×                    |   | -  |   | ÷   | ×                    |   | -  |   | ÷   |
| 3                   | + | 10 | = | 13  | 4                    | + | 10 | = | 14  | 2                    | + | 10 | = | 12  | 2                    | + | 10 | = | 12  |
| =                   |   | =  |   | =   | =                    |   | =  |   | =   | =                    |   | =  |   | =   | =                    |   | =  |   | =   |
| 36                  | ÷ | 3  | = | 12  | 48                   | ÷ | 4  | = | 12  | 26                   | ÷ | 2  | = | 13  | 28                   | ÷ | 2  | = | 14  |

Conclusion

|            | Lettre  | a | b | c | d | e | f |
|------------|---------|---|---|---|---|---|---|
| Solution 1 | Chiffre | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 0 |
| Solution 2 | Chiffre | 1 | 2 | 4 | 6 | 8 | 0 |
| Solution 3 | Chiffre | 1 | 3 | 2 | 5 | 6 | 0 |
| Solution 4 | Chiffre | 1 | 4 | 2 | 6 | 8 | 0 |