Olympiades Nationales de Mathématiques 2023

3e tour | **Niveau 7C** | **19 mars 2023**

Corrigé

proposé par AMIMATHS

Exercice 1

La police a interrogé quatre personnes témoins d’un vol commis par un homme dans un magasin. Voici leurs déclarations concernant la description du voleur :
L’agent de sécurité : "Il était grand, portait une chemise blanche, un pantalon noir avec un bracelet."
Le gérant : "Il était grand, portait une chemise verte, un pantalon rouge avec un bracelet."
Le caissier : "Il était grand, portait une chemise rouge, un pantalon vert sans bracelet."
Le client : "Il était petit, portait une chemise verte, un pantalon noir avec un bracelet."
Peu de temps après, le voleur est arrêté. Les policiers se rendent compte alors que chaque témoin a donné un renseignement exact, mais un seul.
Peux-tu maintenant trouver les informations exactes ?

Corrigé

Pour identifier le voleur la police a besoin de quatre caractéristiques différentes.
Chaque témoin a donné une seule caractéristique exacte.
Deux témoins différents ne peuvent pas donner une même caractéristique exacte.
Si non, on n’aura pas quatre caractéristiques différentes.
Toute caractéristique qui se répète est donc à éliminer.

Barème :	
Une réponse complète	20
Eliminer la répétition	5
Taille du client	3
Couleur de la chemise	3
Couleur du pantalon	3
Etat du Bracelet	3
Idée, rédaction	3

Témoin	Taille	Couleur chemise	Couleur pantalon	Bracelet
Agent sécurité	Grand	Blanche	Noir	Avec
Gérant	Grand	Verte	Rouge	Avec
Caissier	Grand	Rouge	Vert	Sans
Client	Petit	Verte	Noir	Avec

Le voleur est de taille petite, ce qui élimine les trois autres caractéristiques données par le client :

Témoin	Taille	Couleur chemise	Couleur pantalon	Bracelet
Agent sécurité	~~Grand~~	Blanche	~~Noir~~	~~Avec~~
Gérant	~~Grand~~	~~Verte~~	Rouge	~~Avec~~
Caissier	~~Grand~~	Rouge	Vert	Sans
Client	Petit	~~Verte~~	~~Noir~~	~~Avec~~

Dans la ligne de l’agent ne reste qu’une seule caractéristique « Chemise blanche ».
Dans celle du gérant ne reste qu’une seule caractéristique « Pantalon rouge ».
Dans la colonne « Bracelet » ne reste qu’une seule caractéristique « sans bracelet ». Alors on élimine la couleurs « vert » et « rouge » dans la ligne du caissier.
En conclusion : le voleur est <u>petit</u>, la chemise est <u>blanche</u>, le pantalon est <u>rouge</u> et le voleur est sans bracelet.

Témoin	Taille	Couleur chemise	Couleur pantalon	Bracelet
Agent sécurité		Blanche		
Gérant			Rouge	
Caissier		~~Rouge~~	~~Vert~~	Sans
Client	Petit			

Exercice 2

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a+b+c+d=4$.

Montrer que $\dfrac{bcd}{(4-a)^2}+\dfrac{acd}{(4-b)^2}+\dfrac{abd}{(4-c)^2}+\dfrac{abc}{(4-d)^2} \le \dfrac{4}{9}$ et déterminer les cas d'égalité.

Corrigé

D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique (MA-MG) $\sqrt[3]{bcd} \le \dfrac{b+c+d}{3} = \dfrac{4-a}{3}$

d'où $bcd \le \left(\dfrac{4-a}{3}\right)^3$ et par conséquent $\dfrac{bcd}{(4-a)^2} \le \dfrac{4-a}{27}$.

Par analogie on a $\dfrac{acd}{(4-b)^2} \le \dfrac{4-b}{27}$, $\dfrac{abd}{(4-c)^2} \le \dfrac{4-c}{27}$ et $\dfrac{abc}{(4-d)^2} \le \dfrac{4-d}{27}$

Par addition $\dfrac{bcd}{(4-a)^2}+\dfrac{acd}{(4-b)^2}+\dfrac{abd}{(4-c)^2}+\dfrac{abc}{(4-d)^2} \le \dfrac{16-(a+b+c+d)}{27} = \dfrac{12}{27}$

Donc $\dfrac{bcd}{(4-a)^2}+\dfrac{acd}{(4-b)^2}+\dfrac{abd}{(4-c)^2}+\dfrac{abc}{(4-d)^2} \le \dfrac{4}{9}$

$\sqrt[3]{bcd} = \dfrac{b+c+d}{3} \Leftrightarrow b=c=d$ donc il y a égalité si $a=b=c=d=1$

Barème :	
Une réponse complète	20
MA-MG	5
$\sqrt[3]{bcd} \le \dfrac{b+c+d}{3}$	2
$\sqrt[3]{bcd} \le \dfrac{4-a}{3}$	3
$\dfrac{bcd}{(4-a)^2}+\ldots \le \dfrac{4}{9}$	4
Cas d'égalité	3
Idées &rédaction	3

Exercice 3

Soit Γ_1 un cercle tangent intérieurement à un cercle Γ_2 en un point A. Soit P un point de Γ_2 distinct de A. Les points B et C sont les points de contact de Γ_1 avec ses tangentes issues du point P. Les droites (PB) et (PC) recoupent le cercle Γ_2 respectivement en deux points Q et R.

1) Montrer que $QAR = 2BAC$.

2) La droite (BC) coupe le cercle Γ_2 en deux points E et F. Montrer que si le triangle PEF est isocèle en P, alors les points B, C, Q et R sont cocycliques.

Corrigé

1. Montrons que $QAR = 2BAC$

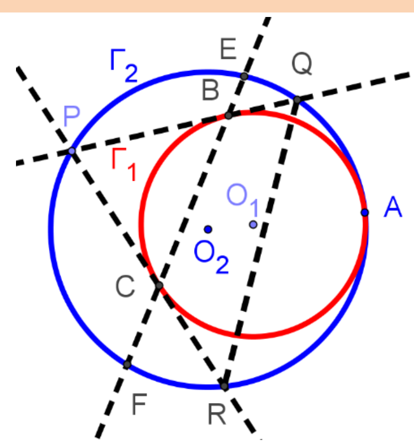
***Méthode 1*:**

$QAR = QPR$	cocyclicité de A, P, Q, R
$= QBC + BCR$	alignement et R.Chales
$= BAC + BAC$	Théorême de la tangente

D'où : $QAR = 2BAC$.

Méthode 2 : Le triangle PBC est isocèle en P.

$\left(\overrightarrow{AQ},\overrightarrow{AR}\right)=\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)$ cocyclicité de A, Q, P, R.



$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)=\left(\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right)=\pi-2\left(\overrightarrow{CP},\overrightarrow{CB}\right)=2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CP}\right)=2\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ (Théorème de la tangente)

2. Supposons que PEF est isocèle en P donc $\left(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF}\right)=\left(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FP}\right)$.

On a modulo π :

$(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QR})=(\overrightarrow{QP},\overrightarrow{QR})$ **Alignement de P, Q et B**

$=(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{ER})$ **cocyclicité des points P, Q, R et E**

$=(\overrightarrow{EP},\overrightarrow{EF})+(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{ER})$ **Relation de Chasles**

$=(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FP})+(\overrightarrow{PF},\overrightarrow{PR})$ **Hypothése + P, E, F et R cocycliques**

$=(\overrightarrow{FE},\overrightarrow{PR})$ **Relation de Chasles**

$=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CR})$ **C,B,E, F alignés aussi C, P, R**

D'où la cocyclicité des points C, B, Q et R.

Barème :	
Une réponse complète	**20pts**
Figure soignée	**5 pts**
QAR = 2BAC	**5pts**
C, B, Q et R cocycliques	**7 pts**
Idée, rédaction	**3pts**

Exercice 4

Trouver tous les réels x, y, z et t tels que :

$$\begin{cases} x+y+z+t=12 \\ xy+xz+xt+yz+yt+zt=54 \end{cases}$$

Corrigé

Solution 1 : **Soit** $S=xy+xz+xt+yz++yt+zt$

$(x+y+z+t)^2=144$ **et** $(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2S$

Donc $x^2+y^2+z^2+t^2=144-108=36$

On remarque que $(x+y+z+t)^2=4(x^2+y^2+z^2+t^2)$

alors d'après l'inégalité de Cauchy Schwarz

$4(x^2+y^2+z^2+t^2)\geq(x+y+z+t)^2$

Le cas d'égalité est lorsque $x=y=z=t$ **d'où** $x=y=z=t=3$

Barème :	
Une réponse complète	**20**
Solution particulière	**4**
$x^2+y^2+z^2+t^2=36$	**6**
$x=y=z=t=3$	**7**
Idée, rédaction	**3**

Solution 2 **:** **Soit** $S=xy+xz+xt+yz++yt+zt$

$(x+y+z+t)^2=144$ **et** $(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2S$

Donc $x^2+y^2+z^2+t^2=144-108=36$

On remarque que

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2+(x-z)^2+(y-t)^2=3\left(x^2+y^2+z^2+t^2\right)-2S$

Alors $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2+(x-z)^2+(y-t)^2=3\times36-2\times54$

D'où $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-t)^2+(t-x)^2+(x-z)^2+(y-t)^2=0$

Alors $x=y=z=t=3$

Solution 3 **: Soit** $S=xy+xz+xt+yz++yt+zt$

$(x+y+z+t)^2=144$ **et** $(x+y+z+t)^2=x^2+y^2+z^2+t^2+2S$

Donc $x^2+y^2+z^2+t^2=144-108=36$

On remarque que $\dfrac{x+y+z+t}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ **et** $\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{36}{4}}=3$

Donc $\dfrac{x+y+z+t}{4}=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2+t^2}{4}}$ **et cette égalité des moyennes arithmétique et quadratique (MA-MQ) est vérifiée si et seulement si** $x=y=z=t$ **. Alors** $x=y=z=t=3$

Solution 4 **: On suppose que x, y, z et t sont les racines d'un polynôme P de quatrième degré en X:**

$P(X)=(X-x)(X-y)(X-z)(X-t)$ **c-à-d** $P(X)=X^4-12X^3+54X^2+dx+e$

Alors $P'(X)=4X^3-36X^2+108X+d$

$$P''(X)=12X^2-72X+108=12(X-3)^2$$

Donc $P(X)=(X-3)^4$ **d'où le polynôme P a quatre racines égales** $x=y=z=t=3$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ **l'équation** $2x^2y-122x^2-33y=2023$

Solution

$$2x^2y-122x^2-33y=2023 \Leftrightarrow 2x^2(y-61)=33y+2023 \Leftrightarrow 2x^2(y-61)=33(y-61)+4036$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-33)(y-61)=4036=4\times 1009$$

Les diviseurs de 4036 sont $1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 4;\ -4;\ 1009;\ -1009;\ 2018;\ -2018;\ 4036$ **et** -4036.

Or $2x^2-33$ **est impair alors ses valeurs possibles sont :**

$1;\ -1;\ 1009;$ **et** -1009

$2x^2-33=1009 \Rightarrow x^2=521$ **impossible.**

$2x^2-33=-1009 \Rightarrow x^2=488$ **impossible.**

$2x^2-33=1 \Rightarrow x^2=17$ **impossible.**

$2x^2-33=-1 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$ **, dans ce cas**

$y-61=-4036 \Rightarrow y=-3975$

Donc l'équation a exactement deux couples deux solutions $(4;-3975)$ **et** $(-4;-3975)$.

Barème :	
Une réponse complète	20
$(2x^2-33)(y-61)=4036$	7
Diviseurs de 4036	5
Les deux solutions	4
Idée, rédaction	4