

**Olympiades Nationales de Mathématiques 2019**  
Sélections régionales Niveau 4AS 20 janvier 2019  
1<sup>er</sup> tour Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de quatre exercices indépendants ;  
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;  
Calculatrice non autorisée*

**Exercice 1 : (25 points)**

1° Déterminer tous les diviseurs (positifs et négatifs) de 6.

2° On considère quatre entiers naturels  $a, b, c$  et  $d$  deux-à-deux distincts tels que :

$$(a - 2019)(b - 2019)(c - 2019)(d - 2019) = 6$$

Déterminer les valeurs possibles de la somme  $S = a + b + c + d$ .

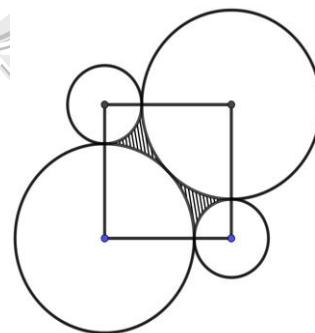
**Exercice 2 : (25 points)**

Sur la figure ci-contre, les centres des quatre cercles sont les sommets d'un carré de côté  $a$ . Les grands cercles sont tangents entre eux et tangents aux petits cercles. Soit  $R$  le rayon des grands cercles et  $r$  celui des petits cercles.

1° a) Calculer  $R$  et  $r$  en fonction de  $a$ .

b) Calculer le rapport  $\frac{R}{r}$ .

2° Calculer l'aire de la partie hachurée en fonction de  $a$ .



**Exercice 3 : (25 points)**

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $|a + 2| \leq 1$  et  $0 \leq b \leq 2$

1) Montrer que :  $|a + b + 1| \leq 2$

2) On considère le nombre  $A$  tel que :  $A = ab - 2a + 3b$ .

a) Montrer que :  $0 \leq A \leq 12$ .

b) Montrer que :  $A = (a + 3)(b - 2) + 6$  et justifier que  $2 \leq A \leq 6$ .

**Exercice 4 : (25 points)**

On considère un carré  $ABCD$  de côté 1 cm et les milieux  $E, F, G$  et  $H$  de ses côtés.

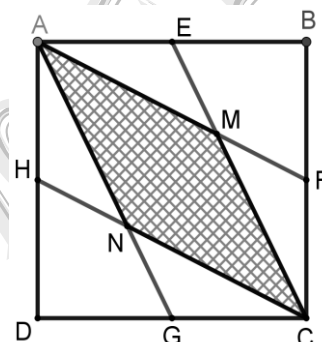
Les droites  $(AF)$  et  $(EC)$  se coupent en  $M$  et les droites  $(AG)$  et  $(CH)$  se coupent en  $N$ .

1° Reproduire la figure.

2° Montrer que  $AMCN$  est un losange.

3° Calculer la distance  $MN$ .

4° Déterminer l'aire du losange  $AMCN$ .



Fin.