

Olympiades Nationales de Mathématiques 2022

1^{er} tour

Niveau 4AS

30 janvier 2022

Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1 (25 points)

Soit x un réel tel que $1 \leq x \leq 2$. On pose $A = \frac{-3x+5}{x+1} - 2x^2$.

- 1) Montrer que $\frac{-3x+5}{x+1} = -3 + \frac{8}{x+1}$.
- 2) Montrer que $-9 \leq A \leq -1$.
- 3) Montrer que $1 \leq \sqrt{A^2 - 2A} \leq 10$.

Exercice 2 (25 points)

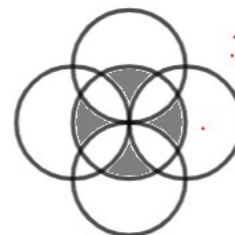
Soient a et b deux réels quelconques.

- 1) Montrer que $9a^2 + 2b^2 + 1 \geq 2b(3a + 1)$.
- 2) Pour quelles valeurs de a et b on a l'égalité ?

Exercice 3 (25 points)

Dans la figure ci-contre, les cinq cercles ont le même rayon 2 cm.

- 1) Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral de côté 2 cm.
- 2) Déterminer l'aire de partie hachurée.



Exercice 4 (25 points)

Dans un désert il y a des serpents, des souris et des scorpions.
Dans ce monde sans pitié, chaque matin, chaque serpent mange une souris.
Chaque midi, chaque scorpion pique un serpent une piqûre mortelle.
Chaque soir, chaque souris mange un scorpion.
Le matin du huitième jour il ne reste plus qu'un animal : une souris.

- 1) Montrer qu'il y avait exactement 19 souris, 13 serpents et 9 scorpions au début de la matinée du cinquième jour
- 2) Combien y avait-il d'animaux de chaque sorte au début de la matinée du premier jour ?

Fin.