

Olympiades Nationales de Mathématiques 2023

1<sup>er</sup> tour

Niveau 4AS

22 janvier 2023  
Durée 3 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.  
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.  
Calculatrice non autorisée*

**Exercice 1 (25 points)**

1) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n-1}} - \frac{n+2}{2^n}$

2) Simplifier au maximum :

$$A = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{10}{2^{10}} ;$$

$$B = 2023 + \frac{4046}{2} + \frac{6069}{4} + \frac{8092}{8} + \dots + \frac{20230}{2^9} .$$

**Exercice 2 (25 points)**

Soit  $x$  un réel inférieur à 2, on donne

$$F(x) = \sqrt{4-x} \sqrt{4-(x-2)} \sqrt{1+(x-5)(x-7)}$$

1) Calculer  $F(2-\sqrt{3})$  et  $F(2-\sqrt{2})$

2) Écrire  $F(x)$  sous la forme  $ax+b$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers.

3) Calculer le nombre  $B = \sqrt{4+2023} \sqrt{4+2025} \sqrt{1+2028 \times 2030}$

**Exercice 3 (25 points)**

Soient  $a, b, c$  et  $d$  des réels tels que  $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = \frac{2022}{2023}$

1) Écrire  $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} - 1$  sous forme de quotient de deux expressions factorisées.

2) Dédire que  $\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{-1}{2022}$

**Exercice 4 (25 points)**

ABCD est un carré de côté 8 cm et H est le milieu du côté [AD].

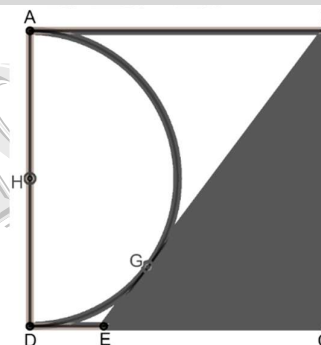
Le segment [BE] et le demi-cercle de centre H sont tangents en G.

On pose  $DE = x$ .

1) Montrer que (HE) est la médiatrice du segment [DG].

2) Prouver que les triangles HAB et HGB sont semblables.

3) En déduire la valeur de  $x$  puis calculer l'aire du triangle BCE.



Fin.