

Olympiades Nationales de Mathématiques 2024
3^e tour Niveau 7C

24 mars 2024
Durée 4 h

*L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de 4 exercices indépendants.
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées.
Calculatrice non autorisée*

Exercice 1 (25 points)

Soit f la fonction numérique définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par : pour tous réels x différent de 0 et 1, on a

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = (2x-1)^2 + f\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Trouver l'expression de $f(x)$.

Exercice 2 (25 points)

ABC un triangle, I le milieu de [BC] et M celui de [AI].

On place sur [AB] le point D tel que $\angle MDI = \angle ACB$ et $AD > BD$.

De même on place sur [AC] le point E tel que $\angle MEI = \angle ABC$ et $AE > CE$.

Montrer que les points B, C, D et E sont cocycliques.

Exercice 3 (25 points)

Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que

$$a+b+c+d=16 \text{ et } \frac{abc+2}{a+2} = \frac{bcd+2}{b+2} = \frac{cda+2}{c+2} = \frac{dab+2}{d+2}$$

1° Vérifier que $da^2b + 2dab + 2a = abcd + 2abc + 2d$ et en déduire la valeur de $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$

2° Déterminer l'ensemble des valeurs possibles des nombres a, b, c et d .

Exercice 4 (25 points)

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n, p et q tels que : $n^2 = 2^p + 21^q$

Fin.