Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales **Niveau 7C** **28 janvier 2018**
1er tour **Durée 3 h**

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;

Calculatrice non autorisée

<u>Exercice 1 :</u> (20 points)

ABCD est un carré direct de coté 1, (Q) est un quart de cercle de centre C et passant par B et D. M est un point variable du segment [AB] distinct de A et B. Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le coté [AD] en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.

On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$

1. a) Faire une figure et démontrer que : $MN = 2 - x - y$

b) En déduire que $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$

2) Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Calculer cette distance.

3) Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Calculer cette aire.

<u>Exercice 2 ;</u> (20 points)

Pour tout réel $a \neq 0$, on considère les matrices $M_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ **et** $N_a = \begin{pmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a - \frac{1}{a}\right) \\ -a\sqrt{3} & -a \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$ et $\forall b \in \mathbb{R}^*$ on a : $M_a \times M_b = M_{ab}$, $N_a \times N_b = M_{\frac{b}{a}}$, $M_a \times N_b = N_{\frac{b}{a}}$ et $N_b \times M_a = N_{ab}$.

2) Que peut-on dire de $(M_a)^n$? $(N_a)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$?

<u>Exercice 3 :</u> (20 points)

1) Resoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x - 2y = 1$.

2.a) Montrer que, pour tout entier naturel n, le couple $(14n+3, 21n+4)$ est solution de (E).

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ les deux nombres $14n+3$ et $21n+4$ sont premiers entre eux.

3.a) Soit $d = \text{pgcd}(21n+4, 2n+1)$. Justifier que $d = 1$ ou $d = 13$.

b) Montrer que $d = 13 \Leftrightarrow n \equiv 6\,[13]$.

4) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on note $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$.

a) Montrer que les deux nombres A et B sont divisibles par $n-1$.

b) Déterminer, suivant les valeurs de n, le $\text{pgcd}(A, B)$.

<u>Exercice 4 :</u> (20 points)

Soit m un nombre complexe différent de 1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z :

$$(E) : z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0.$$

1. a) Montrer que le discriminant Δ de (E) s'écrit sous la forme $\Delta = \left[(1+i)(m-1)\right]^2$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

c) Déterminer, sous forme algébrique, m tel que le produit des solutions de (E) soit égal à 1.

2) Ecrire la forme trigonométrique des complexes $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$, pour $m = e^{i\theta}$ ($\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$).

<u>Exercice 5 :</u> (20 points)

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

1) Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f .

2) Détermine l'expression de la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f en fonction de n. **<u>Fin.</u>**