

Olympiades Nationales de Mathématiques 2018

Sélections régionales
2^{ème} tour

Niveau 7C

25 février 2018
Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;

Calculatrice non autorisée

Exercice 1 : (20 points)

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.

Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.

Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve. Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5), le nombre 8 par (5, 4).

- 1) Comment est repéré le nombre 42 ?
- 2) Comment est repéré le nombre 2018 ?
- 3) Quel est le nombre qui est sous 2018 ?

				1				
				2	3	4		
			5	6	7	8	9	
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18							

Exercice 2 : (20 points)

On voudrait recouvrir la surface d'un carré ABCD de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm.

1) Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q. Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP]. Soit U le point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].

- a) Faire une figure et calculer DT.
 - b) On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2 .
 - c) On dit qu'un cercle recouvre un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1 , C_2 et C_3 recouvrent plus de 99,75% de la surface du carré ABCD.
- 2) Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , chacun de rayon 5 cm.

Exercice 3 : (20 points)

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 15; & U_1 = 57 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n; & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note V_n le reste de la division euclidienne de U_n par 9.

- 1) Calculer V_0, V_1, \dots, V_9 .
- 2) Justifier que la suite (V_n) est périodique. Déterminer sa période.
- 3) Trouver le plus grand entier k tel que $3^k \mid U_{2018}$.

Exercice 4 : (20 points)

Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant :
$$\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)zx = 4 \\ (z+1)xy = 4 \end{cases}$$

Exercice 5 : (20 points)

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$ où f est la fonction qui à tout couple d'entiers naturels (x;y) associe l'entier naturel $f(x;y)$ tel que : $f(0;y) = y+1$, $f(x;0) = f(x-1;1)$, $f(x+1;y+1) = f(x;f(x+1;y))$

Fin.