République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Enseignement Secondaire
et de la Formation Technique et Professionnelle
Commission Nationale des Compétitions de Sciences

Olympiades Nationales de Mathématiques 2020

2ème tour **Niveau 7C** **23 février 2020**

Durée 3 h

L'épreuve est notée sur 100 points. Elle est composée de cinq exercices indépendants ;
Toute réponse doit être justifiée et les solutions partielles seront examinées ;
Calculatrice non autorisée

Exercice 1

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_{n,k} = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^k\right)^n}$

1.a) Calculer $I_{0,k}$; $I_{n,1}$ et $I_{1,2}$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout $x \in [0,1]$, on ait : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$ puis en déduire la valeur de $I_{1,3}$.

2) Pour $k \geq 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_{n,k} = \int_0^1 \frac{x^k}{\left(1+x^k\right)^n} dx$.

a) Etablir une relation entre $J_{n,k}$; $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_{n,k} = \frac{1}{k(n-1)2^{n-1}} + \frac{1}{k(n-k)} I_{n-1,k}$

c) En déduire une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-1,k}$ pour tout $n \geq 2$.

d) En déduire $I_{3,2}$.

Exercice 2

Dans le plan, on donne n points $A_1, A_2, \dots, A_n$. On se propose d'étudier l'existence de n points $M_1, M_2, \dots, M_n$ tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3]$..., A_{n-1} soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$. On note z_k, a_k les l'affixes respectives des points M_k et A_k.

1) On suppose l'existence d'une solution du problème.

a) Justifier que : $\forall k \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $z_k + z_{k+1} = 2a_k$ et $z_n + z_1 = 2a_n$

b) Montrer que : $\left(1-(-1)^n\right) z_1 = 2a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + \dots + 2(-1)^{n-1} a_1$

2) Discuter selon la parité de n l'existence d'une solution du problème.

Exercice 3

Soit $A(z) = (z+1)^{2n} - 1$, où $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer qu'il existe un polynôme B tel que $A(z) = z \times B(z)$.

b) Soit $B(z) = b_{2n-1} z^{2n-1} + b_{2n-2} z^{2n-2} + \dots + b_1 z + b_0$, quelle est la valeur de b_0 ?

c) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ avec $z_0 = 0$.

2.a) On pose $P_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$. Montrer à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$.

b) En déduire que, si $Q_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \sin\frac{k\pi}{2n}$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.

c) Calculer de deux façons $\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$. Puis en déduire Q_n et enfin P_n.

Exercice 4

Soient a, b et c des réels. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $\det M = 2abc(a+b+c)^3$

2) Discuter suivant a, b et c les solutions du système : $\begin{cases} (b+c)^2x + b^2y + c^2z = 1 \\ a^2x + (c+a)^2y + c^2z = 1 \\ a^2x + b^2y + (a+b)^2z = 1 \end{cases}$

Exercice 5

On se propose de déterminer une fonction de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifie les deux conditions : $f(1) = 1$ et pour tous les entiers naturels m et, $f(m+n) = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m)$.

1) On suppose qu'une telle fonction f existe.

a) Calculer $f(0)$ (on pourra poser $n = 0$ et $m = 1$).

b) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(6)$.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) = 2f(n) + 1$.

3) On pose pour tout entier naturel n, $g(n) = f(n) + 1$.

Montrer que, pour tous entiers naturels m et n, $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.

4) Donner une fonction f qui répond au problème.

Fin.