

Olympiades Nationales de Mathématiques 2008

Sélection finale

1^{er} jour

16 mars 2008

Durée 4h30min

*L'épreuve est composée de trois exercices indépendants notés sur 7 points chacun.
Toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

Exercice N°1

Soit $f_1(x) = \frac{1+x}{1-x}$ et pour tout entier naturel $n \geq 2$ on pose : $f_n(x) = f_1(f_{n-1}(x))$

Calculer $f_{2008}(2008)$.

Exercice N°2

On sait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Etant données trois droites du plan concourantes en un même point, construire alors un triangle dont les médiatrices sont ces trois droites.

Exercice N°3

Trouver toutes les valeurs du paramètre réel a , pour lesquelles l'équation

$$16x^4 - ax^3 + (2a + 17)x^2 - ax + 16 = 0$$

a exactement quatre racines réelles distinctes qui forment une progression géométrique.

Fin.

Olympiades Nationales de Mathématiques 2008

Sélection finale
2^{ème} jour

17 mars 2008
Durée 4h30min

*L'épreuve est composée de trois exercices indépendants notés sur 7 points chacun.
Toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les calculatrices ne sont pas autorisées.*

Exercice N°4

Compléter le cadre ci-dessous avec des chiffres de façon que toutes les assertions soient vraies :

Dans ce cadre, il y a exactement :
..... fois le chiffre 0
..... fois le chiffre 1
..... fois le chiffre 2
..... fois le chiffre 3
..... fois le chiffre 4
..... fois le chiffre 5
..... fois le chiffre 6

Exercice N°5

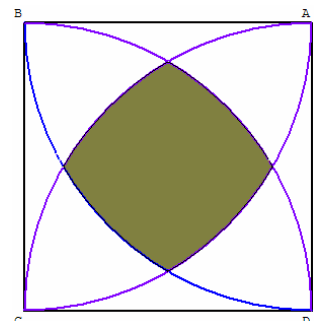
Lorsqu'on calcule l'expression $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$ au moyen d'une calculatrice on trouve : $x = 2.9999999999999999$

Calculer la valeur exacte de x .

Exercice N°6

Sur la figure ci-contre **ABCD** est un carré de côté a et les courbes joignant ses sommets opposés sont les quarts de cercle.

Calculer l'aire colorée en fonction de a .



Fin.