

Camp d'entraînement de préparation aux OAM 2022

Test 3

22.09.2022

durée 1h30

Thème 3 : Algèbre

Exercice 1 (6 points)

Soient a, b et c des réels non nuls tels que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Calculer $A = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$ et $B = \frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab}$

Exercice 2 (6 points)

Montrer que pour tous réels a, b et c tels que $abc = 1$ on a :

$$1. a^5 + b^5 \geq a^2 b^2 (a + b) \qquad 2. \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

Exercice 3 (4 points)

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que, pour tous entiers naturels n et m :

$$f(f(n) + f(m)) = n + m$$

Exercice 4 (4 points)

Trouver toutes les applications f de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $(x+y)(f(x)-f(y)) = (x-y)f(x+y)$

pour tous réels x et y .