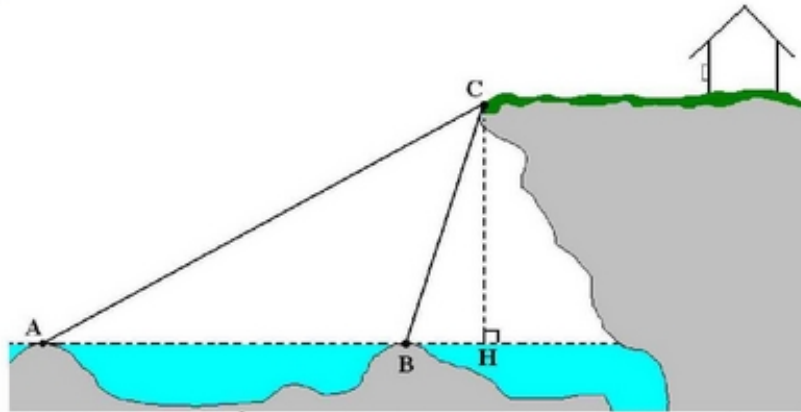

cours de mathématiques en première

Relations métriques dans le triangle quelconque.

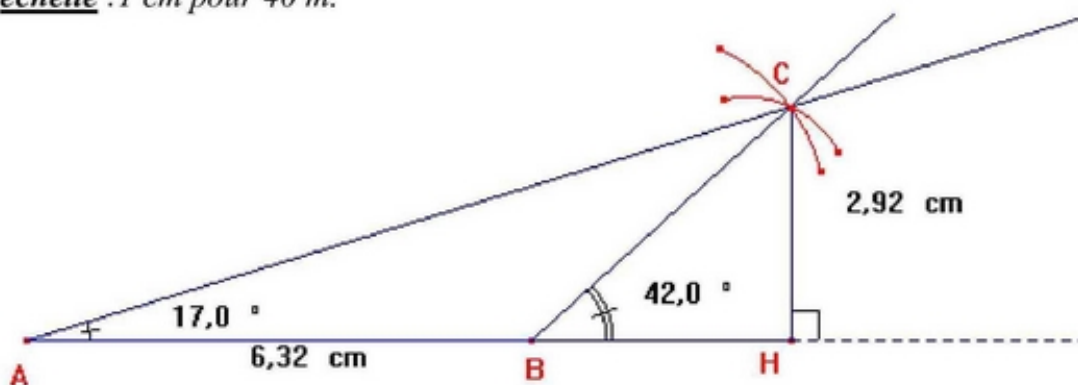
I-mise en situations



Pour connaître la hauteur de la falaise d'Étretat (Seine maritime), on mesure deux angles d'élévation par rapport à un point C sur la falaise : $\widehat{CAH} = 17^\circ$ et $\widehat{CBH} = 42^\circ$; La distance AB est égale à 253 m.

1- **Construire** sur le quadrillage ci-dessous, les triangles de la figure.

échelle : 1 cm pour 40 m.



2- **Mesurer** CH. **$CH = 2,92 \times 40 = 116,8$ m**

3- Nous allons déterminer CH par le calcul.

a) **Donner** l'expression de CH dans le triangle ACH rectangle en H en fonction de BH et de l'angle \widehat{CAH} .

D'après la formule de la tangente :

$$\tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH}$$

or

$$AH = AB + BH \text{ soit } AH = 252 + BH$$

Soit

$$CH = (253 + BH) \times \tan \widehat{CAH}$$

b) **Donner** l'expression de BH en fonction de CH et de l'angle \widehat{CBH} dans le triangle CBH rectangle en H.

D'après la formule la tangente :

$$\tan \widehat{CBH} = \frac{CH}{BH} \text{ soit}$$

$$BH = \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}}$$

c) En utilisant les formules établies au 2.a) et 2.b), donner l'expression de CH en fonction de l'angle \widehat{CAH} et \widehat{CBH} .

$$CH = (253 + BH) \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH = \left(253 + \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}} \right) \times \tan \widehat{CAH}$$

$$= 253 \times \tan \widehat{CAH} + \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}} \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH - \frac{CH}{\tan \widehat{CBH}} \times \tan \widehat{CAH} = 253 \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH \left(1 - \frac{\tan \widehat{CAH}}{\tan \widehat{CBH}} \right) = 253 \times \tan \widehat{CAH}$$

$$CH = \frac{253 \times \tan \widehat{CAH}}{\left(1 - \frac{\tan \widehat{CAH}}{\tan \widehat{CBH}} \right)}$$

d) En déduire CH.

$$CH \approx 117,12 \text{ m}$$

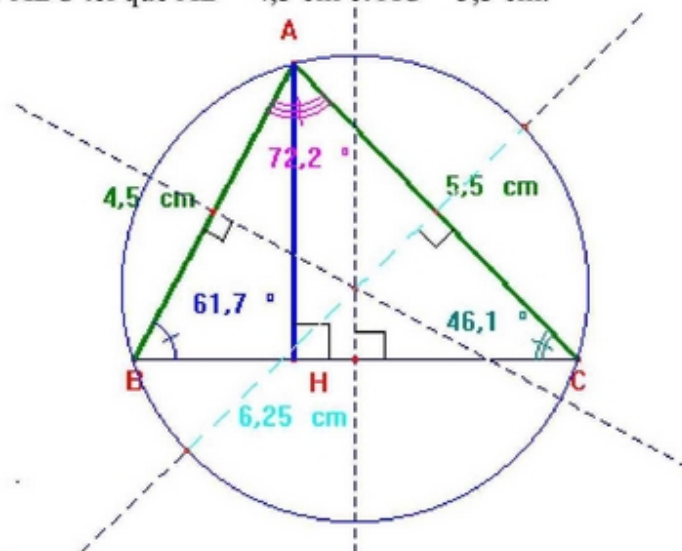
Constatation :

le calcul est « faisable » mais long et compliqué !!!!!

II- Théorème des sinus.

1-Découverte du théorème.

1-**Construire** un triangle ABC tel que AB = 4,5 cm et AC = 5,5 cm.



2-**Tracer** la hauteur [AH].

3-

- a) **Utiliser** les relations trigonométriques, dans le triangle ABH, rectangle en H, **pour exprimer** $\sin \widehat{B}$:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}$$

b) En déduire une expression de AH en fonction de $\sin \hat{B}$ et AB. $AH = AB \times \sin \hat{B}$

c) Utiliser les relations trigonométriques, dans le triangle ACH, rectangle en H, pour exprimer $\sin \hat{C}$

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC}$$

d) En déduire une expression de AH en fonction de $\sin \hat{C}$ et AC. $AH = AC \times \sin \hat{C}$

4-En déduire la relation suivante : $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}}$

D'après la question 3.b) et 3.d) : $AB \times \sin \hat{B} = AC \times \sin \hat{C}$ soit $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}}$

5-Mesurer sur la figure, les angles \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} et compléter le tableau suivant :

	$\hat{A} = 72,2^\circ$	$\hat{B} = 61,7^\circ$	$\hat{C} = 46,1^\circ$
	$\frac{BA}{\sin \hat{C}}$	$\frac{BC}{\sin \hat{A}}$	$\frac{AC}{\sin \hat{B}}$
Valeur exacte	$\frac{4,5}{\sin 46,1^\circ}$	$\frac{6}{\sin 72,2^\circ}$	$\frac{5,5}{\sin 61,7^\circ}$
Valeur arrondie à 10^{-1} près	6,24	6,3	6,24

6- Conclure.

Les résultats sont quasiment identiques, on peut donc conclure que les longueurs de côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

7- Tracer le cercle circonscrit au triangle.

8-Mesurer son diamètre. En déduire son rayon. On mesure $\varnothing = 6,25$ cm soit $R = \frac{\varnothing}{2} \approx 3,12$

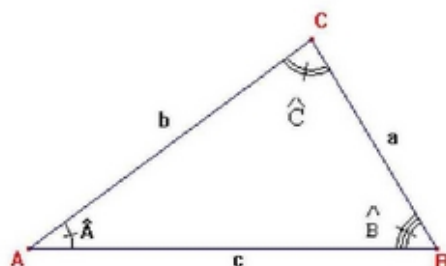
9-En déduire une égalité entre la relation suivante $\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$ et le rayon.

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R$$

2-Définition.

Dans tout triangle, les longueurs des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$



3- Dans quelle situation utiliser le théorème des sinus.

- Calculer la longueur d'un côté lorsque l'on connaît la mesure de deux angles et la longueur d'un côté.
- Calculer la mesure d'un angle lorsque l'on connaît la longueur de deux côtés et la mesure d'un angle non compris entre ces deux côtés.

4- Applications.

1- Calculer les longueurs du côté [AB] d'un triangle ABC tel que :

		<i>Résolution</i>
a)	$BC = 10 ; \hat{A} = 70^\circ ; \hat{C} = 50^\circ$	
<i>FIGURE</i>		
b)	$BC = 8 ; \hat{B} = 50^\circ ; \hat{C} = 100^\circ$	
<i>FIGURE</i>		

2- Calculer la mesure de l'angle \hat{A} d'un triangle ABC tel que :

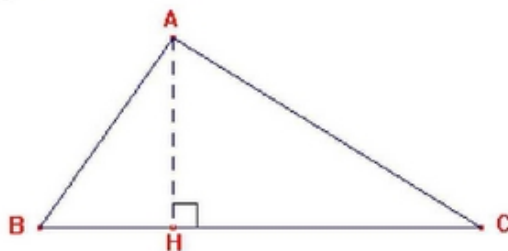
a)	$AB = 8 ; BC = 10 ; \hat{C} = 40^\circ$	
<i>FIGURE</i>		
b)	$AB = 15 ; BC = 20 ; \hat{C} = 40^\circ$	
<i>FIGURE</i>		

II- Théorème des cosinus ou théorème de Carnot.

1-Découverte du théorème.

a-premier cas : Triangle quelconque dont tous les angles sont aigus.

Soit le triangle quelconque ABC.



1-Travail dans le triangle rectangle ABH.

a) **Ecrire** la relation de Pythagore pour le triangle rectangle ABH.

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

b) **Exprimer** BH en fonction de BC et HC.

$$BC = BH + HC \text{ soit } \underline{BH = BC - HC}$$

c) **Donner** alors l'expression de AB^2 .

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$\underline{AB^2 = AH^2 + BC^2 - 2.BC.HC + HC^2}$$

(1)

2-Travail dans le triangle rectangle ACH.

a) **Ecrire** la relation de Pythagore pour le triangle rectangle ACH.

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

b) **Exprimer** AH en fonction de AC et CH.

$$AH^2 = AC^2 - CH^2$$

c) **Remplacer** l'expression de AH^2 dans la relation (1).

$$AB^2 = AC^2 - CH^2 + BC^2 - 2.BC.HC + HC^2$$

$$\underline{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.BC.HC}$$

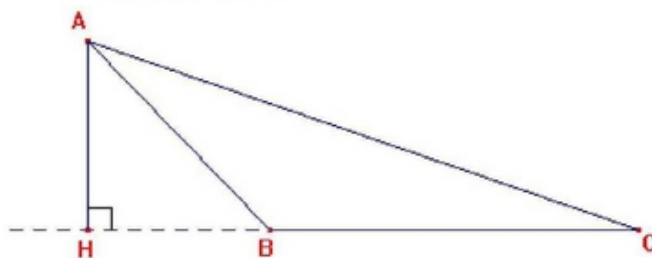
d) **Exprimer** CH en fonction de AC et de l'angle \hat{C} .

$$\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \text{ soit } \underline{HC = AC \times \cos \hat{C}}$$

3- En **déduire** l'expression de AB^2 en fonction de AC, BC et \hat{C} .

$$\underline{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.BC.AC.\cos \hat{C}}$$

b-deuxième cas : Triangle quelconque dont l'un des angles est obtus.



1- **Exprimer** BH en fonction de HC et BC.

$$HC = HB + BC \text{ soit } \underline{BH = HC - BC}$$

2- **Exprimer** AB^2 dans le triangle rectangle AHB.

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

3- **Exprimer** AB^2 en fonction de AC, BC et HC.

$$\begin{aligned} AB^2 &= AH^2 + (HC - BC)^2 \\ &= AH^2 + HC^2 - 2.HC.BC + BC^2 \end{aligned}$$

D'où

$$AB^2 = AC^2 - HC^2 + HC^2 - 2.HC.BC + BC^2$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.HC.BC$$

4- Exprimer CH en fonction de AC et de l'angle \hat{C} .

$$\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \text{ soit } \underline{HC = AC \times \cos \hat{C}}$$

5- En déduire l'expression de AB^2 en fonction de AC, BC et \hat{C} .

$$\underline{AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.BC.AC.\cos \hat{C}}$$

4- Obtient-on le même résultat que dans le premier cas ?

Oui, les deux expressions obtenues sont identiques.

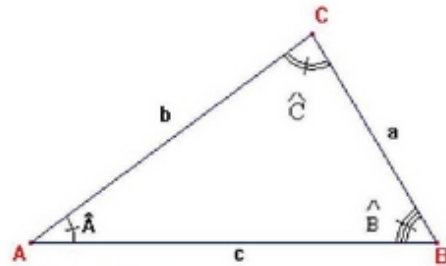
2-Définition.

Dans tout triangle :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \hat{C}$$



3-Dans quelle situation utiliser le théorème des cosinus.

- Calculer la longueur d'un côté lorsque l'on connaît la mesure d'un angle et les longueurs de deux côtés.
- Calculer la mesure d'un angle lorsque l'on connaît la longueur des trois côtés.

4-Dans quelle situation utiliser le théorème des cosinus.

1-Calculer la mesure de l'angle \hat{B} du triangle ABC tel que :

		<i>Résolution</i>
a)	AB = 8; AC = 7; BC = 6	
FIGURE		
b)	AB = 3; AC = 5; BC = 4	
FIGURE		

2- Calculer la mesure de la longueur du côté [AB] du triangle ABC tel que :

a)	$AC = 15 ; BC = 19 ; \hat{C} = 115^\circ$	
FIGURE		
b)	$AC = 10 ; BC = 20 ; \hat{C} = 60^\circ$	
FIGURE		

III-Aire d'un triangle.

1-Définition.

L'aire d'un triangle ABC est égale à :

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

2-Exemple.

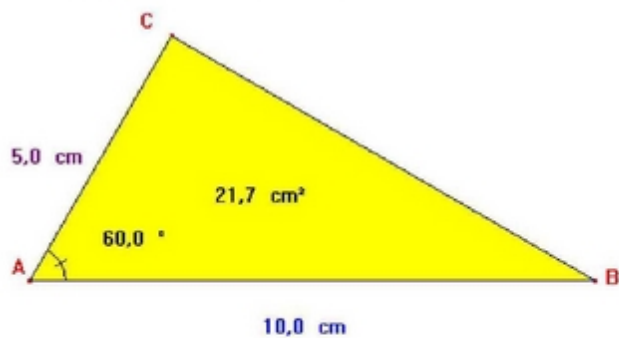
Calculer l'aire du triangle ABC tel que :

$$AB = 10 \text{ cm} ; \quad AC = 5 \text{ cm} ; \quad \hat{A} = 60^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \times \sin 60^\circ$$

$$S = 21,65$$



IV-Activités d'examen.

1- Calculer les angles d'un triangle ABC tel que :

$$BC = 8 \text{ cm} ; AC = 4 \text{ cm} ; AB = 6 \text{ cm}$$

2- On considère le diagramme des forces appliquées à un solide en équilibre :

$$F_1 = 100 \text{ N} ; F_2 = 70 \text{ N} ; F_3 = 50 \text{ N}$$

Calculer la mesure à 1° près de chaque angle de ce triangle.

3- On donne deux tensions \vec{U}_1 et \vec{U}_2 avec :

$$U_1 = 14 \text{ V et } U_2 = 18 \text{ V ; } (\vec{U}_1 ; \vec{U}_2) = -60^\circ$$

$$\text{On pose } \vec{U}_T = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 \quad \text{et} \quad \phi = (\vec{U}_1 ; \vec{U}_T).$$

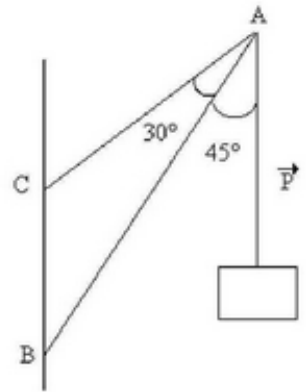
Déterminer U_T et ϕ_T

4-

Au point A sont exercées :

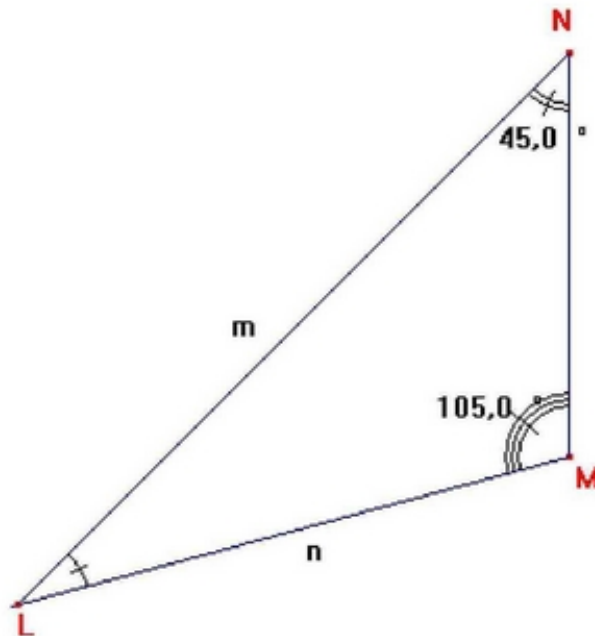
-un poids \vec{P} d'intensité 1500N.

-Deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , exercées par les barres [AB] et [AC] dont les droites d'action sont celles des barres.



1) Déterminer les mesures m et n des côtés LN et LM du triangle LMN ci-contre pour $MN = l = 15 \text{ cm}$.

$$\widehat{N} = 45^\circ ; \widehat{M} = 105^\circ.$$



2) On rappelle que la condition d'équilibre du point A s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$$

a- Tracer le polygone, ou dynamique des forces.

b- En déduire le sens et l'intensité des forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .