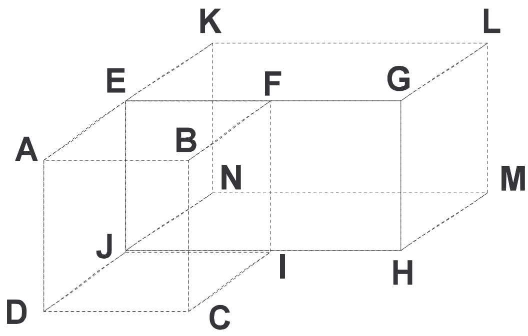
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Avant tout, rappelons une propriété fondamentale :

Tout théorème de Géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.



Les exemples de ce chapitre se réfèrent au dessin ci-contre :
ABCDEFIJ est un cube
EGHJKLMN est un parallélépipède rectangle tel que
HM = CI et JH = 2JI

I) Vecteurs de l'espace

- Lorsque $A \neq B$, **la direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB) , **le sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la **longueur** ou **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\| \overrightarrow{AB} \|$, est la distance AB .
- Lorsque A = B , $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$.
- On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ …
- Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point A tel que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$.

1) Vecteurs égaux

Chacune des propriétés suivantes signifie que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- ABCD est un parallélogramme**.** (*Si* A, B, C *et* D *sont alignés, on dit que* ABCD *est un parallélogramme aplati)*

2) Règles de calcul

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

- **RELATION DE CHASLES :**
  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \ldots\ldots\ldots$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} = \ldots\ldots\ldots$ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KL} = \ldots\ldots\ldots$
- **REGLE DU PARALLELOGRAMME :**
  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} = \ldots\ldots\ldots$ $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{JH} = \ldots\ldots\ldots$ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DA} = \ldots\ldots\ldots$
- **OPPOSE D'UN VECTEUR :**
  $\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ldots$ $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{LG} = \ldots\ldots\ldots$
- **MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN REEL :**
  Pour tous réels a et b, et pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a :
  $a (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $(a + b) \overrightarrow{u} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a (b \overrightarrow{u}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $a\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) Vecteurs colinéaires

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont la même direction sont dits **colinéaires.**

  Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.
- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que ………………

  Exemple : $\overrightarrow{EG} = 2\ \overrightarrow{AB}$ donc : ………………………………………………………………………………………………
- Dire que les points A, B et C sont alignés revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que ………………

  Exemple : Montrer que les points D, I et M sont alignés.

  ……

  ……

  ……

  ……

4) Vecteurs orthogonaux

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les directions sont orthogonales sont dits **orthogonaux.** On note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

  Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

  Exemples : ……………………………………………………………………………………………………

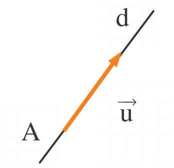
II) Interprétation vectorielle des droites et plans de l'espace

1) Droites

Soit d une droite, on appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d .

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

(A ; $\vec{u}$) représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.



Remarques :

- La droite (A ; $\vec{u}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires,

  c'est à dire tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\ \vec{u}$
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires,

  c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{CD}$

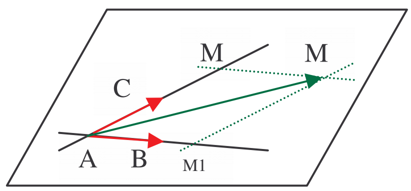
2) Plans

PLAN DETERMINE PAR TROIS POINTS :

Soit A, B et C trois points non alignés.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\ \overrightarrow{AB} + y\ \overrightarrow{AC}$

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) .



Ici : ……………………………………..

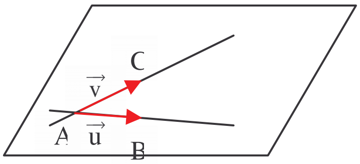
PLAN DEFINI PAR UN POINT ET UN COUPLE DE VECTEURS NON COLINEAIRES :

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

On note **(A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)** ce plan

(A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$.

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des **vecteurs directeurs** du plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$)
ou encore que le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$



Remarque :

Si $\vec{u}$' est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{v}$' un vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$, alors le plan (A ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) est le même que le plan (A ; $\vec{u}$' , $\vec{v}$')

Exemple : Le plan (A ; $\overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{KL}$) est le plan ………………………………

III) Vecteurs coplanaires

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.

Démonstration :

Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB).

Par définition, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire C ∈ (OAB)

ce qui revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}$.

IV) Interprétation vectorielle du parallélisme

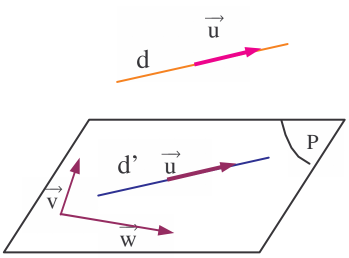
1) Deux droites

Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) Une droite et un plan

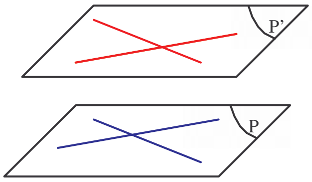
Dire qu'une droite d , de vecteur directeur $\vec{u}$, est parallèle à un plan P , de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ revient à dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

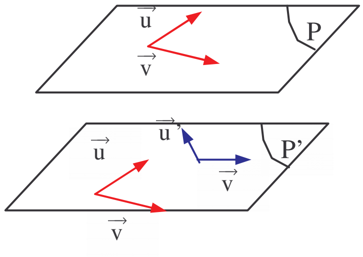
ou encore : … il existe des réels a et b tels que $\vec{u} = a\,\vec{v} + b\,\vec{w}$



3) <u>Deux plans</u>

Dire qu'un plan P , de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est parallèle à un plan P' de vecteurs directeurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ revient à dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ sont coplanaires.





<u>ou encore :</u> … il existe des réels a et b tels que $\vec{u}' = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ et, il existe des réels a' et b' tels que $\vec{v}' = a'\,\vec{u} + b'\,\vec{v}$

V) <u>Barycentre dans l'espace</u>

Les définitions et propriétés concernant le barycentre dans le plan se généralisent à l'espace.

Soit A , B et C trois points de l'espace et a , b et c trois réels tels que $a + b + c \neq 0$.
Il existe un unique point G vérifiant : $a\,\overrightarrow{GA} + b\,\overrightarrow{GB} + c\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Ce point G est appelé **barycentre** du système {(A , a) ; (B , b) ; (C , c)}.

<u>Remarques :</u>

- Comme dans le plan le barycentre reste inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients, par un même nombre non nul.
- La règle du barycentre partiel reste vraie.
- Le barycentre de {(A ; a) , (B ; b)} appartient à la droite (AB) .
- Le barycentre de {(A ; a) , (B ; b) , (C ; c)} appartient au plan (ABC) .

VI) <u>Repères et coordonnées</u>

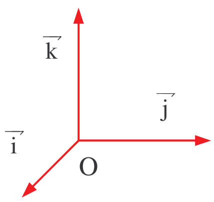
1) <u>Base et repère</u>

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace et O un point de l'espace, alors :

- ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est **une base** des vecteurs de l'espace
- (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est **un repère** de l'espace

On dit que le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est **orthogonal** lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux .
Si, de plus, les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires (ont pour norme 1) alors, on dit que le repère est **orthonormal**.

Représentation classique d'un repère orthonormal (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$; $\vec{k}$)



2) Coordonnées

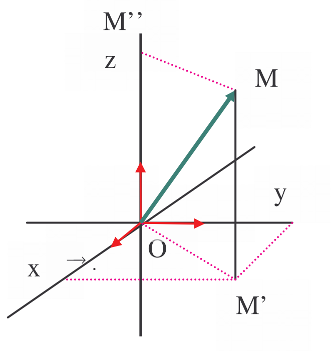
Soit (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) un repère de l'espace .

A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels (x ; y ; z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

On dit que (x ; y ; z) sont les **coordonnées** du point M dans le repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

ou que (x ; y ; z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

x , y et z sont respectivement **l'abscisse** , **l'ordonnée** et **la cote** du point M .



Exemple :

Dans le repère (J ; $\overrightarrow{JD}$; $\overrightarrow{JI}$; $\overrightarrow{JE}$) : les coordonnées des points sont :

$A\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $C\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $D\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $E\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $G\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

$H\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $I\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $J\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $K\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $M\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$

3) Propriétés

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u}$ (a , b , c) et $\vec{v}$ (a' , b' , c') deux vecteurs , A (x , y , z) et B (x' , y' , z') deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur k $\vec{u}$ a pour coordonnées ……………………………………………………………………..
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées ………………………………………………………………………………
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow$ ………………………………………………………………………………………………………
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées ……..…………………………………………………………………………..
- Le milieu I de [AB] a pour coordonnées ………………………………………………………………………………
- Le barycentre de {(A ; α) , (B ; β)} a pour coordonnées ……………………………………………………………

VII) Distance et orthogonalité

Dans ce paragraphe l'espace est muni d'une repère **orthonormal** (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) .

1) Norme et distance

- Si un vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (a ; b ; c) alors : $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$
- Si les points A et B ont pour coordonnées respectives (x_A , y_A , z_A) et (x_B , y_B , z_B) , alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

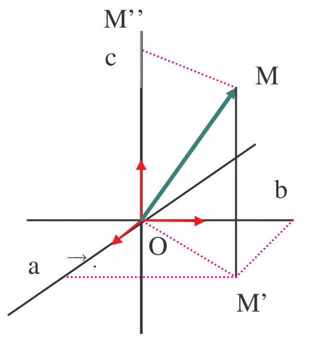
Démonstrations :

- On note M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont (a ; b ; c) et $\|\vec{u}\|^2 = OM$

Puisque le repère est orthonormal, le triangle OM'M est rectangle en M' donc : $OM'^2 = a^2 + b^2$ et $M'M^2 = OM''^2 = c^2$

On en déduit, d'après le théorème de Pythagore que : $\|\vec{u}\|^2 = OM^2 = OM'^2 + OM''^2 = a^2 + b^2 + c^2$

- $AB = \| \overrightarrow{AB} \|$



2) Condition analytique d'orthogonalité

Dans **une base orthonormale** :

Dire que les vecteurs $\vec{u}$ (x ; y ; z) et $\vec{v}$ (x' ; y' ; z') sont orthogonaux revient à dire que x x' + y y' + z z' = 0

Démonstration :

- Le résultat est immédiat lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls , on note M et M' les points définis par $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$.

  Les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont respectivement celles de M et de M' .

  Ainsi dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que le triangle OMM' est rectangle en O

  c'est à dire que $OM^2 + OM'^2 = MM'^2$

  Or $OM^2 =$ ……………….. $OM'^2 =$ ……………….. $MM'^2 =$ ………………..………………..

  Ainsi $\vec{u} \perp \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ ……………….. ……………….. ……………….. ……………….. ………………..

  ……………….. ……………….. ……………….. ……………….. ………………..

  ……………….. ……………….. ……………….. ……………….. ………………..

  ……………….. ……………….. ……………….. ……………….. ………………..

  ……………….. ……………….. ……………….. ……………….. ………………..