ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

Devoir de Maths

Classes :7C — **Durée : 3H** — **18/11/2018**

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 (3 points)

Soit $z = e^{i\frac{\pi}{2019}}$. On pose $S = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2018}$.

1) Vérifier que $z^{2020} = -z$. En déduire que $S = \frac{1}{1-z}$.

2) Ecrire S sous forme algébrique.

3) En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{2019} + \cos\frac{4\pi}{2019} + ... + \cos\frac{2018\pi}{2019} = \frac{-1}{2}$.

Exercice 2 (4 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.

2) Vérifier que M^2 est la matrice nulle. En déduire A^2.

3) Déduire A^{-1}

4) Résoudre le système $\begin{cases} -2x - 2y + z = -7 \\ 3x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 10y - 6z = 26 \end{cases}$

Exercice 3 (4 points)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\quad z^2 - 2iz\cos\alpha - 1 = 0$ où α est un paramètre réel, $\alpha \in [0, 2\pi]$.

1.a) Résoudre l'équation particulière E_π.

b) Donner les solutions de l'équation E_α sous formes algébrique et exponentielle.

2.a) Résoudre l'équation $z^n = e^{i\theta}$ où θ est un paramètre réel. .

b) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2iz^n\cos\alpha - 1 = 0 \text{ où } n \in IN^* \text{ donné.}$$

Exercice 4 (7 points)

On considère le polynôme *P*, défini sur $\mathbb{C}$, par : $P(z)=z^3-(5+5i)z^2+(2+22i)z+8-24i$

1.a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

c) Résoudre l'équation $P(z)=0$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A , B et C images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $\mathrm{Im}(z_A)<\mathrm{Im}(z_B)<\mathrm{Im}(z_C)$.

a) Placer les points A ,B ,C et G et montrer que les points O,A,B,C sont cocycliques.

b) Calculer l'affixe du point G barycentre du système $\{(A;2),(B;-3),(C;5)\}$

c) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre A qui transforme B en C.

d) Calculer l'affixe du point D image de C par la similitude directe s.

3) On pose $Z=\dfrac{z-3-i}{z-4i}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $\arg Z=\dfrac{\pi}{2}\quad[\pi]$

b) $|Z|=1$

c) $|Z|=2$

d) $2\arg Z=2(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})\quad[2\pi]$.

Présentation : 2 points

Fin.