Et finalement $2(\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DM'})=0[2\pi]$. D'où les points M, M' et D sont alignés.

Exercice 2 Bac 2007 SN Corrigé

Enoncé

Dans le plan orienté, on considère le losange direct $ABCD$ de centre I tel que $IB = 2IC = 2a$.

On désigne Γ_1 le cercle de centre C et de rayon $CI = a$ et par Γ_2 le cercle de centre B et de rayon $BI = 2a$.

1.a) Faire une figure (On pourra prendre (BD) horizontale).

b) Placer sur la figure précédente les points E et F tels que : $\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{FB}-2\overrightarrow{FC}=\vec{0}$.

2. On considère l'ensemble Γ_3 des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MC}=2$.

a) Vérifier que les points I, E et F appartiennent à Γ_3.

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3.

3. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme C en B et A en I. Déterminer l'angle et le centre Ω de cette rotation. Placer Ω sur la figure.

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude s qui transforme C en B et A en D.

b) Montrer que $s(I) = I$.

c) Donner les éléments caractéristiques de s.

d) Montrer que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

5. On pose $f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2, et r la rotation définie en 3).

a) Montrer que $f = s$.

b) Donner la forme réduite de s.

6. Soit s' une similitude directe qui transforme Γ_1 en Γ_2.

a) Montrer que toutes les similitudes s' sont de même rapport k' que l'on déterminera.

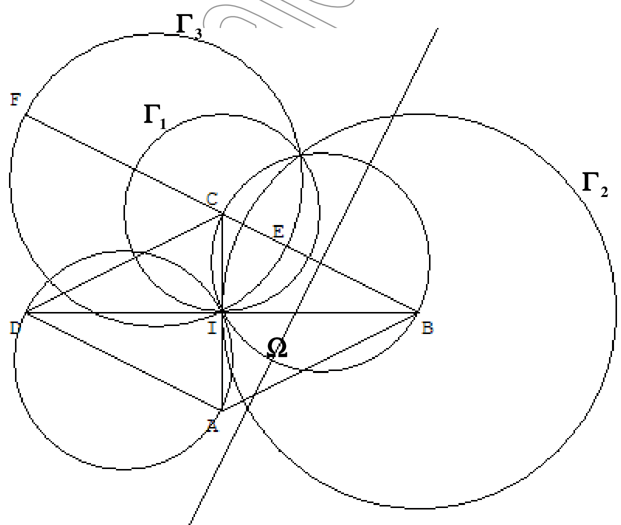
b) Déterminer le lieu géométrique des centres des similitudes s'.

c) Dans le cas où s' est une homothétie, donner les positions possibles du centre et les valeurs du rapport de cette homothétie.

Corrigé

Dans le plan orienté, on considère le losange direct $ABCD$ de centre I tel que $IB = 2IC = 2a$.
On désigne Γ_1 le cercle de centre C et de rayon $CI = a$ et par Γ_2 le cercle de centre B et de rayon $BI = 2a$.

1.a) Figure



b) Pour placer les points E et F :

On a $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$, d'où

E=bar

B	C
1	2

donc $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

On a aussi $\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ d'où

F=bar

B	C
1	-2

Donc $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$

D'autre part, du parallélogramme ABEF on déduit que C est le milieu de [BF]. Alors B, C, Ω et F sont alignés et $\Omega \in [BF]$.

On sait aussi que $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Comme Ω, C et F sont alignés dans cet ordre, et par addition on obtient $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega A}) = \pi[2\pi]$ d'où $\Omega \in [JA]$.

Alors les diagonales $[BF]$ et $[JA]$ du trapèze ABJF se coupent en Ω. Ce qui implique que Ω est le centre de l'homothétie qui transforme (A,B) en (J,F). Cette homothétie transforme le cercle de diamètre [AB] au cercle de diamètre [JF].

Puisque Ω appartient à ces deux cercles, donc ils sont tangent en Ω.

4) On a :

$$A \xrightarrow{s} B$$
$$\Omega \longrightarrow \Omega$$

Alors s transforme le cercle de centre A passant par Ω au cercle de centre B passant par Ω. Donc $s(\Gamma) = \Gamma'$.

Comme la droite (AB) est un axe de symétrie de la configuration composée des deux cercles Γ et Γ', donc les triangles ABD et $AB\Omega$ sont rectangles de même hypoténuse. D'où les points Ω, A, B et D sont cocycliques.

b) Soit M un point de Γ distinct de Ω et de D. $s(M) = M'$.

Pour montrer que les points M, M' et D sont alignés, on a :

$2(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DM'}) = 2(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{D\Omega}) + 2(\overrightarrow{D\Omega}, \overrightarrow{DM'})[2\pi]$

$2(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DM'}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A\Omega}) + (\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BM'})[2\pi]$

Comme la similitude conserve les angles orientés : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A\Omega}) = (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{B\Omega})[2\pi]$

Donc : $2(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DM'}) = (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{B\Omega}) + (\overrightarrow{B\Omega}, \overrightarrow{BM'})[2\pi]$

On peut utiliser les méthodes précédentes. On peut aussi utiliser la conservation du barycentre par la similitude directe :

J est le quatrième sommet du carré COJE, donc J' est le quatrième sommet de son image le carré AEJ'G dont on connaît déjà les sommets A, E et G. Alors J' = F.

En d'autre terme : $J = \text{bar}\{(O,1);(C,-1);(E,1)\}$; donc :

$s(J) = \text{bar}\{(s(O),1);(s(C),-1);(s(E),1)\}$

$s(J) = \text{bar}\{(E,1);(A,-1);(G,1)\}$. Alors $s(J) = F$.

Conclusion

La similitude s transforme le carré COJE en AEFG

3) Comme l'angle de s est $\frac{\pi}{2}$; Ω son centre avec :

$$\begin{array}{c} s \\ J \longrightarrow F \\ E \longrightarrow G \\ C \longrightarrow A \\ A \longrightarrow B \end{array}$$

Alors

$(\overrightarrow{\Omega J},\overrightarrow{\Omega F}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $(\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega G}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc le point Ω appartient aux cercles de diamètres $[JF]$, $[EG]$, $[CA]$ et $[AB]$.

b) Pour démontrer que les deux cercles de diamètres $[JF]$ et $[AB]$ sont tangents en Ω, on sait que $(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega A}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{\Omega A},\overrightarrow{\Omega B}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Par addition on obtient $(\overrightarrow{\Omega C},\overrightarrow{\Omega B}) = \pi[2\pi]$ d'où $\Omega \in [BC]$.

2. Γ_3 est l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MB}{MC} = 2$.

a) Pour vérifier que les points I, E et F appartiennent à Γ_3, on a :

$$\begin{cases} CI = a \\ BI = 2a \end{cases} \Rightarrow \frac{IB}{IC} = 2 \Rightarrow I \in \Gamma_3$$

$$\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Rightarrow EB = 2EC \Rightarrow \frac{EB}{EC} = 2 \Rightarrow E \in \Gamma_3$$

$$\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Rightarrow FB = 2FC \Rightarrow \frac{FB}{FC} = 2 \Rightarrow F \in \Gamma_3$$

<u>Conclusion</u> : Les points I, E et F appartiennent à Γ_3.

b) Pour déterminer et construire l'ensemble Γ_3 on remarque immédiatement que Γ_3 est le cercle circonscrit au triangle IEF.

Avec une autre méthode, on a :

$$M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow \frac{MB}{MC} = 2$$
$$\Leftrightarrow MB^2 - 4MC^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$$
$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{MF} \cdot 3\overrightarrow{ME} = 0$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$$

On en déduit que Γ_3 est le cercle de diamètre $[EF]$ où E et F sont les points définis précédemment.

Pour la construction, voir la figure.

3. Pour montrer l'existence et l'unicité d'une rotation r qui transforme C en B et A en I, on a : $CA = BI = 2a \neq 0$ et $\overrightarrow{CB} \neq \overrightarrow{AI}$, donc il existe une unique rotation r telle que :

$$\begin{array}{c} r \\ C \longrightarrow B \\ A \longrightarrow I \end{array}$$

- L'angle de r est $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BI}) = (\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}) = \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$.
- Le centre Ω de r est le point d'intersection des médiatrices des segment $[BC]$ et $[AI]$ (voir figure).

On peut aussi remarquer que le centre est le point d'intersection des cercles de diamètres [BC] et [AI] autre que I, car r(A) = I.

4.a) On a $CA \neq 0$ et $BD \neq 0$, donc il existe une unique similitude s qui transforme C en B et A en D.

b) Pour montrer que $s(I) = I$, on a :

$$C \xrightarrow{s} B$$
$$A \longrightarrow D$$

On sait que la similitude directe conserve le milieu. Donc s transforme le milieu I du segment $[CA]$ au milieu du segment $[BD]$ d'où $s(I) = I$.

c) Eléments caractéristiques de s :

- Le centre de s est I car $s(I) = I$.
- L'angle de s est $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}) = \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$
- Le rapport de s est $\frac{BD}{CA} = \frac{BI}{CI} = 2$.

d) Pour montrer que $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$, on sait que l'image par s du cercle Γ_1 de centre C et de rayon $CI = a$ est le cercle de centre $s(C) = B$ et de rayon $BI = 2a$, c'est-à-dire le cercle Γ_2.

Autrement dit , on a :

$$C \xrightarrow{s} B$$
$$I \longrightarrow I$$

Donc s transforme le cercle de centre C passant par I au cercle de centre B passant par I. Alors $s(\Gamma_1) = \Gamma_2$.

5. On a $f = h \circ r$, où h est l'homothétie de centre B et de rapport 2, et r la rotation définie en 3).

Alors :

$$C \xrightarrow{s} A$$
$$E \longrightarrow G$$
$$O \longrightarrow O'$$
$$J \longrightarrow J'$$

Déterminons $s(O)$:

<u>Méthode 1</u>

Le point O' est l'unique qui vérifie

$$\begin{cases} (\overrightarrow{CO},\overrightarrow{AO'}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{AO'}{CO} = 2 \end{cases}$$

Comme

$$\begin{cases} (\overrightarrow{CO},\overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \frac{AE}{CO} = 2 \end{cases}$$

Donc O'= E

<u>Méthode 2</u>

Le point O est l'intersection des droites (OC) et (OE).

La similitude s transforme la droite (OC) en (AE) car (AE) passe par $s(C) = A$ et perpendiculaire à (OC).

De même, s transforme la droite (OE) en (GE).

Les droites images se coupent en E.

La similitude conserve l'intersection. Alors $s(O) = E$.

<u>Méthode 3</u>

La similitude s transforme le triangle direct OCA rectangle isocèle en C en un triangle direct O'AB rectangle isocèle en A car $s(C) = A$ et $s(A) = B$. D'où $s(O) = E$.

Déterminons $s(J)$: