Exercices corrigés sur le calcul des nombres complexes

Exercice 1 Voir la correction
On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = -1+2i$ et $z_2 = 3+4i$.Déterminer la forme algébrique de :

1. $z_1 + z_2$
2. $z_1 - z_2$
3. $z_1 - 3z_2$
4. $z_1 z_2$
5. $\dfrac{z_1}{z_2}$

Exercice 2 Voir la correction
On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Donnez la forme algébrique de j^2.
2. Calculez $1 + j + j^2$.

Exercice 3 Voir la correction
Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $(1+i)^2(5+2i)$
2. $(5-2i)(4+3i)(i-1)$

Exercice 4 Voir la correction
Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1}{4+2i}$
2. $\dfrac{2}{1-i} - \dfrac{5}{1+i}$
3. $\dfrac{3-2i}{-4+3i}$

Exercice 5 Voir la correction
x et y sont deux nombres réels. Quelle est la forme algébrique de $(x+1+iy)(x-1-iy)$?

Exercice 6 Voir la correction
Résoudre les équations suivantes dont z est l'inconnue :

1. $(3-2i)z = i-1$
2. $(2+i)\bar{z} = 5i+2$

Exercice 7 Voir la correction
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes puis donnez les solutions sous forme algébrique.

1. $3iz - 2 + 4i = (1-2i)z + 6$
2. $(4+i)z = 4\bar{z} - 6i$
3. $iz^2 + (3-4i)z = 0$
4. $\dfrac{z+2}{z-2} = i$
5. $z^2 + 7 = 0$
6. $z^2 - 8z + 25 = 0$
7. $z^2 = z + 1$
8. $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$
9. $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$

Correction exercice n°1

Revenir exercice

La forme algébrique d'un nombre complexe est unique. C'est l'écriture sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont deux **nombres réels**.

1. $z_1 + z_2 = 2 + 6i$
2. $z_1 - z_2 = -4 - 2i$
3. $z_1 - 3z_2 = -10 - 10i$
4. $z_1 z_2 = -11 + 2i$
5. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}i$

Correction exercice n°2

Revenir exercice

1. $j^2 = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $1 + j + j^2 = 0$.

Correction exercice n°3

Revenir exercice

1. $(1+i)^2(5+2i) = 2i(5+2i) = -4 + 10i$
2. $(5-2i)(4+3i)(i-1) = (26+7i)(i-1) = -33 + 19i$

Correction exercice n°4

Revenir exercice

1. $\dfrac{1}{4+2i} = \dfrac{4-2i}{(4+2i)(4-2i)} = \dfrac{4-2i}{20} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10}i$
2. $\dfrac{2}{1-i} - \dfrac{5}{1+i} = \dfrac{2(1+i) - 5(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$
3. $\dfrac{3-2i}{-4+3i} = \dfrac{(3-2i)(-4-3i)}{(-4+3i)(-4-3i)} = \dfrac{-18-i}{25} = -\dfrac{18}{25} - \dfrac{i}{25}$

Correction exercice n°5

Revenir exercice

$(x+1+iy)(x-1-iy) = (x+1)(x-1) + y^2 + iy(x-1) - iy(x+1) = x^2 + y^2 - 1 - 2yi$

Donc la partie réelle est $x^2 + y^2 - 1$ et la partie imaginaire est $-2y$.

Correction exercice n°6

Revenir exercice

1. $(3-2i)z = i - 1$ L'équation devient $z = \dfrac{i-1}{3-2i}$ puis $z = -\dfrac{5}{13} + \dfrac{1}{13}i$ après calculs.
2. $(2+i)\bar{z} = 5i + 2$ On cherche d'abord la forme algébrique de $\bar{z}$ avant de donner celle de z. L'équation devient : $\bar{z} = \dfrac{2+5i}{2+i} = \dfrac{(2+5i)(2-i)}{5} = \dfrac{9}{5} + \dfrac{8}{5}i$.

   Donc $z = \dfrac{9}{5} - \dfrac{8}{5}i$

Correction exercice n°7

Revenir exercice

1. $3iz - 2 + 4i = (1-2i)z + 6$
   L'équation devient $3iz - (1-2i)z = 6 + 2 - 4i$ soit encore $(-1+5i)z = 8 - 4i$ soit $z = \dfrac{8-4i}{-1+5i} = \dfrac{(8-4i)(-1-5i)}{(-1+5i)(-1-5i)} = \dfrac{-28-36i}{26} = -\dfrac{14}{13} - \dfrac{18}{13}i$
2. $iz^2 + (3-4i)z = 0$
   L'équation devient après factorisation : $z(iz+3-4i) = 0$. Donc soit $z = 0$ ou $iz+3-4i = 0$. Ce qui donne finalement deux solutions $z = 0$ et $z = 4+3i$
3. $\dfrac{z+2}{z-2} = i$
   L'équation devient $z+2 = i(z-2)$ (si $z \neq 2$) soit $z(1-i) = -2-2i$ soit $z = \dfrac{2+2i}{i-1} = -2i$
4. $z^2 + 7 = 0$
   $z^2 = -7$ soit $z^2 = (\sqrt{7}i)^2$. Donc $z = -i\sqrt{7}$ ou $z = i\sqrt{7}$.
5. $z^2 - 8z + 25 = 0$
   $\Delta = -36$. Donc deux solutions complexes :$z_1 = \dfrac{8-i\sqrt{36}}{2} = 4-3i$ et $z_2 = \dfrac{8+i\sqrt{36}}{2} = 4+3i$
6. $z^2 = z + 1$
   L'équation s'écrit $z^2 - z - 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 5$ donc deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (ce dernier étant mieux connu sous l'appellation nombre d'or !)
7. $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$
   C'est une identité remarquable ! $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 = (z+\sqrt{3})^2 = 0$ si et seulement si $z = -\sqrt{3}$.
8. $z^2 - 2(1+\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2}+2) = 0$
   $\Delta = 4(1+\sqrt{2})^2 - 4\times 2(\sqrt{2}+2) = -4$. Donc l'équation admet deux racines complexes :$z_1 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}) - i\sqrt{4}}{2} = 1+\sqrt{2}-i$ et $z_2 = \dfrac{2(1+\sqrt{2}) + i\sqrt{4}}{2} = 1+\sqrt{2}+i$