

## Nombres complexes Exercices corrigés (7C)

### Exercice 1 (Bac 2018 sn)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i.$$

1.a) Calculer  $P(3i)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z-3i)(z^2 + az + b)$

0.5 pt

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ .

0.5 pt

c) On considère les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $|z_C| \leq |z_B| \leq |z_A|$ . Placer les points  $A, B$  et  $C$  et déterminer la nature du triangle  $ABC$ .

0.5 pt

d) Soit  $A' = \overline{\{(A; -5), (B; 6), (C; 12)\}}$ . Vérifier que l'affixe de  $A'$  est  $z_{A'} = -3 + i$ . Placer  $A'$ .

0.5 pt

2° On considère l'ellipse  $\Gamma$  de sommets  $A, A'$  et  $B$ .

a) Déterminer le centre  $I$  et l'excentricité de  $\Gamma$ .

0.5 pt

b) Ecrire une équation cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

0.5 pt

c) Préciser les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe  $(Ox)$ .

0.5 pt

d) Déterminer les foyers et les directrices de  $\Gamma$  puis construire  $\Gamma$ .

0.5 pt

### Corrigé

1.a) Pour calculer  $P(3i)$  on remplace  $z$  par  $3i$  :

$$\begin{aligned} P(3i) &= (3i)^3 - (1+4i)(3i)^2 - (9-i)(3i) - 6 + 18i \\ &= -27i + 9 + 36i - 27i - 3 - 6 + 18i \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors le nombre  $3i$  est une racine de  $P$ . Donc ils existent deux nombres complexes  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z-3i)(z^2 + az + b)$ , utilisons le tableau d'Horner pour les déterminer :

	1	-1-4i	-9+i	-6+18i
3i		3i	-3i+3	-18i+6
	1	-1-i	-6-2i	0

D'où  $a = -1 - i$  et  $b = -6 - 2i$

Alors pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $P(z) = (z-3i)(z^2 - (1+i)z - 6 - 2i)$

b) On a  $P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 3i = 0$  ou  $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$ .

D'une part  $z - 3i = 0 \Leftrightarrow z = 3i$

D'autre part, le discriminant de l'équation  $z^2 - (1+i)z - 6 - 2i = 0$  est

$$\Delta = (1+i)^2 + 4(6+2i) = 24 + 10i = 25 - 1 + 2 \times 5 \times i = (5+i)^2$$

D'où  $\delta = 5+i$  est une racine carrée de  $\Delta$ .

Alors les solutions de cette équation sont

$$z = \frac{1+i+(5+i)}{2} = 3+i \text{ et } z = \frac{1+i-(5+i)}{2} = -2.$$

**Conclusion :** L'ensemble de solutions de l'équation

$P(z) = 0$  est  $\{-2, 3i, 3+i\}$

c) En remarquant que  $|-2| < |3i| < |3+i|$  ; on a alors

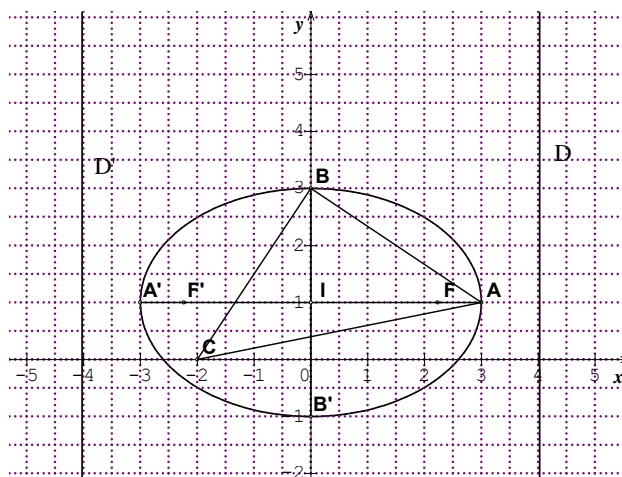
$$z_A = 3+i; z_B = 3i \text{ et } z_C = -2.$$

**Construction :**

$$z_A = 3+i \Rightarrow A(3;1)$$

$$z_B = 3i \Rightarrow B(0;3)$$

$$z_C = -2 \Rightarrow C(-2;0)$$



On a  $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{3i - (3+i)}{3i - (-2)} = \frac{-3+2i}{2+3i} = \frac{i(3i+2)}{2+3i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  donc  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $\frac{BA}{BC} = 1$ . D'où le triangle ABC est rectangle isocèle direct en B.

d) Le point  $A'$  est le barycentre du système  $\{(A; -5), (B; 6), (C; 12)\}$ . Alors L'affixe de  $A'$  est

$$z_{A'} = \frac{-5z_A + 6z_B + 12z_C}{-5 + 6 + 12}$$

$$z_{A'} = \frac{-5(3+i) + 6(3i) + 12(-2)}{-5 + 6 + 12}$$

$$z_{A'} = \frac{-39 + 13i}{13}$$

Donc :  $z_{A'} = -3+i$  et  $A'(-3;1)$

2.a) Puisque les points  $A$ ,  $A'$  et  $B$  sont des sommets de l'ellipse  $\Gamma$ , et  $B$  appartient à la médiatrice du segment  $[AA']$ , donc la droite  $(AA')$  est un axe de  $\Gamma$  et par suite le centre de  $\Gamma$  est le milieu  $I$  de  $[AA']$ . Son affixe est

$$z_I = \frac{z_A + z_{A'}}{2}$$

$$z_I = \frac{3+i + (-3+i)}{2}$$

$$z_I = i$$

Alors le centre de  $\Gamma$  est le point  $I(0,1)$ .

Les demi-longueurs des axes sont  $a = IA = |z_A - z_I| = |3+i - i| = |3| = 3$  et  $b = IB = |z_B - z_I| = |3i - i| = |2i| = 2$  donc

$a > b$ , d'où  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$  et par conséquent l'excentricité de  $\Gamma$  est  $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

b) Le centre de  $\Gamma$  est le point  $I(0,1)$ . Ses demi-longueurs des axes sont  $a=3$  et  $b=2$ . Alors, une équation

cartésienne de  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  est  $\frac{(x-0)^2}{3^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$

C'est-à-dire :  $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

c) Pour déterminer les coordonnées  $(x,y)$  des points d'intersection de  $\Gamma$  avec  $(Ox)$ , on résout le système :

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Ceci équivaut à  $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{1}{4} = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{9} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = \frac{27}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{27}{4}} \end{cases}$$

Donc  $\Gamma$  coupe  $(Ox)$  en deux points  $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$  et  $N\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ .

d) Dans le repère  $(I; \vec{i}, \vec{j})$ , l'équation réduite de  $\Gamma$  est  $\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$ ; avec  $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$

Les foyers de  $\Gamma$  sont  $F(c; 0)$  et  $F'(-c; 0)$  avec  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ .

Donc  $F(\sqrt{5}; 0)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 0)$ .

Les directrices de  $\Gamma$  sont les droites  $D$  et  $D'$  d'équations respectives  $X = \frac{a^2}{c}$  et  $X = -\frac{a^2}{c}$ .

$$\text{Donc } X = \frac{9}{\sqrt{5}} \text{ et } X = -\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

Alors dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Les foyers :  $F(\sqrt{5}; 1)$  et  $F'(-\sqrt{5}; 1)$  car  $Y = y - 1 \Rightarrow y = Y + 1$ .

Les directrices ont pour équations:  $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$  et  $x = -\frac{9}{\sqrt{5}}$  car  $X = x$ .

Pour la construction voir la figure précédente.

### Exercice 2 (Bac 2018 sc)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :

$$P(z) = z^3 - (7 + 3i)z^2 + (12 + 15i)z - 4 - 18i.$$

1.a) Calculer  $P(2)$  et déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que  $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z - 2)(z^2 + az + b)$  0.75 pt

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . 0.5 pt

c) On considère les points  $A, B$  et  $D$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $\text{Im}(z_A) \leq \text{Im}(z_B) \leq \text{Im}(z_D)$ . Placer les points  $A, B$  et  $D$  et déterminer la nature du triangle  $ABD$ . 0.75 pt

2° a) Déterminer le barycentre du système  $\{(A; 9), (B; -6), (C; 2)\}$ , où  $C$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $(BD)$ . 0.5 pt

b) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que  $9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$ . 0.5 pt

c) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  du plan tels que  $4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2 = -10$  0.5 pt

d) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma_3$  des points  $M$  du plan tels que  $(9\vec{MA} - 6\vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}) = 10$ . 0.5 pt

3° Soit  $S^0 = \text{id}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, S^{n+1} = S \circ S^n$  où  $S$  est la similitude directe qui transforme  $A$  en  $B$  et  $B$  en  $D$ .

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de  $S^{2018}$  0.5 pt

b) Justifier que  $S^{2020}$  est une homothétie de rapport positif. 0.5 pt

### Corrigé

1° a)  $P(2) = 2^3 - (7 + 3i)2^2 + (12 + 15i)2 - 4 - 18i = 8 - 28 - 12i + 24 + 30i - 4 - 18i = 0$ . Donc 2 est une racine carrée de  $P$ . Le tableau de Horner nous permet d'écrire  $P(z)$  sous la forme  $P(z) = (z - 2)(z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 9i)$ .

b)  $P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 2$  ou  $z^2 - (5 + 3i)z + 2 + 9i = 0$ . Pour cette dernière équation on a

$$\Delta = (5 + 3i)^2 - 4(2 + 9i) = 8 - 6i = (3 - i)^2, \text{ donc ses solutions sont } z_1 = \frac{(5 + 3i) + (3 - i)}{2} = 4 + i \text{ et}$$

$$z_2 = \frac{(5 + 3i) - (3 - i)}{2} = 1 + 2i. \text{ D'où les solutions de l'équation } P(z) = 0 \text{ sont } z_0 = 2; z_1 = 4 + i \text{ et } z_2 = 1 + 2i.$$

c) Comme  $\text{Im}(z_0) \leq \text{Im}(z_1) \leq \text{Im}(z_2)$  alors  $z_A = 2; z_B = 4 + i$  et  $z_D = 1 + 2i$ .

On a  $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 2i - 2}{4 + i - 2} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{i(i + 2)}{2 + i} = i$ , d'où le triangle ABD est rectangle isocèle et direct en A.

2° a) Le point C est donc un sommet du carré ABCD alors son affixe est  $z_C = -z_A + z_B + z_D = 3 + 3i$ , donc

l'affixe du barycentre du système  $\{(A;9), (B;-6), (C;2)\}$  est  $\frac{9z_A - 6z_B + 2z_C}{9 - 6 + 2} = \frac{18 - 24 - 6i + 6 + 6i}{5} = 0$ . D'où O est

le barycentre du système  $\{(A;9), (B;-6), (C;2)\}$ .

b) Soit  $\varphi(M) = 9MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2$ . Pour tout point M du plan, on a  $\varphi(M) = 5MO^2 + 9OA^2 - 6OB^2 + 2OC^2$  donc

$\varphi(M) = 5MO^2 + 36 - 102 + 36 = 5MO^2 - 30$ . Alors

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow \varphi(M) = -10 \Leftrightarrow 5MO^2 = 20 \Leftrightarrow MO^2 = 4$ .

Donc  $\Gamma_1$  est le cercle de centre O et de rayon 2, il passe par A.

c) Soit  $\psi(M) = 4MA^2 - 6MB^2 + 2MC^2$ . On remarque que  $\psi(A) = 4AA^2 - 6AB^2 + 2AC^2 = -10$ , donc  $A \in \Gamma_2$

Pour tout point M du plan, on a

$\psi(M) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} + \psi(A) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u} - 10$  avec

$\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{IB}$  où I est le barycentre du

système  $\{(A;2), (C;1)\}$ , donc  $z_I = \frac{2z_A + z_C}{3} = \frac{7}{3} + i$ . Alors

$\psi(M) = 12\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{IB} - 10$

$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow \psi(M) = -10 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$ . Donc  $\Gamma_2$  est la droite perpendiculaire à  $(IB)$  passant par A.

d) Soit  $\sigma(M) = (9\overrightarrow{MA} - 6\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 5\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MD}$

Soit J le milieu de  $[OD]$ , L'affixe de J est donc  $z_J = \frac{1}{2}z_D = \frac{1}{2} + i$  alors  $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MD} = MJ^2 - \frac{1}{4}OD^2 = MJ^2 - \frac{5}{4}$ .

Pour tout point M du plan on a donc  $\sigma(M) = 5MJ^2 - \frac{25}{4}$  et alors  $M \in \Gamma_3 \Leftrightarrow 5MJ^2 - \frac{25}{4} = 10 \Leftrightarrow MJ^2 = \frac{13}{4}$

Alors  $\Gamma_3$  est le cercle de centre J et de rayon  $\frac{1}{2}\sqrt{13}$ . Or  $AJ^2 = \frac{13}{4}$  donc le cercle  $\Gamma_3$  passe par A.

3°a) L'écriture complexe de S est de la forme  $z' = az + b$  avec

$\begin{cases} S(A) = B \\ S(B) = D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + i = 2a + b \\ 1 + 2i = a(4 + i) + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + i \\ b = 6 - i \end{cases}$ . Donc l'écriture complexe de S est

$z' = (-1 + i)z + 6 - i$ . Donc le rapport de S est  $|-1 + i| = \sqrt{2}$ , son angle est une mesure de  $\arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$  et son

centre est le point  $\Omega$  d'affixe  $\omega = \frac{6 - i}{1 - (-1 + i)} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i$

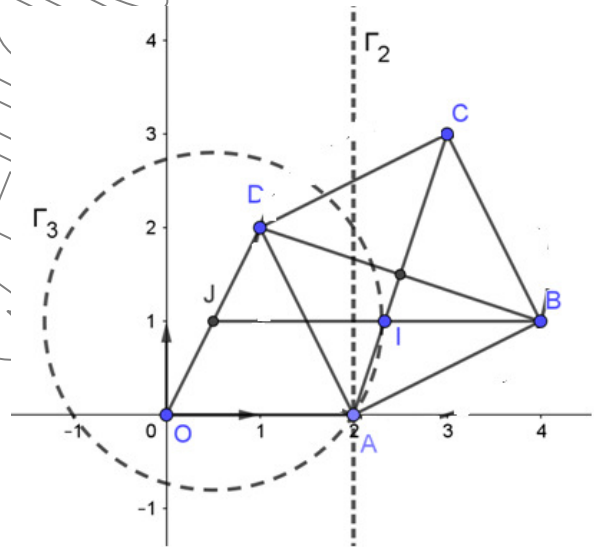
b)  $S = s\left(\Omega; \sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$  donc  $S^{2018} = s\left(\Omega; (\sqrt{2})^{2018}; \frac{3\pi}{4} \times 2018\right) \Rightarrow S^{2018} = s\left(\Omega; 2^{1009}; -\frac{\pi}{2}\right)$

c) On a  $S^4 = s\left(\Omega; (\sqrt{2})^4; \frac{3\pi}{4} \times 4\right) \Rightarrow S^4 = s(\Omega; 4; \pi)$  c'est donc l'homothétie h de centre  $\Omega$  et de rapport  $-4$  et on

a  $S^8 = h^2$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport 16. En plus on a  $2020 \equiv 4[8]$  ce qui montre que

$2020^{2020} \equiv 4^{2020}[8]$ . Or  $4^{2020} = 2^{4040} = 2^{3 \times 1346 + 2} = 2^{4037} \times 2^2 = 2^{4037} \times 4$ , un multiple de 8, donc  $4^{2020} \equiv 0[8]$ . Ce qui

montre l'existence d'un entier k tel que  $2020^{2020} = 8k$  et par conséquent que  $S^{2020^{2020}} = S^{8k}$  qui est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $(-4)^{8k} = 4^{8k}$ . D'où  $S^{2020^{2020}}$  est une homothétie de rapport positif.



### Exercice 3 ( Bac 2017 sn)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- 1) a- Soit  $a$  un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue  $z$  :  
$$(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$$
- b- Soient  $f$  et  $g$  les transformations données par leurs expressions complexes  $f: z \rightarrow z' = 1 - iz$  et  $g: z \rightarrow z'' = z - i$ . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations  $f$  et  $g$ . Dans le reste de l'exercice on considère les points  $I, M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_0 = 1 - i$ ,  $z_1 = 1 - ia$  et  $z_2 = a - i$  où  $a = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0, 2\pi[$
- 2) a- Montrer que le triangle  $IM_1M_2$  est rectangle en  $I$ , isocèle et direct.
- b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points  $M_1$  et  $M_2$  lors que  $\alpha$  décrit l'intervalle  $]0, \pi[$
- c- Ecrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle pour  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .
- 3) Soit  $M_3$  le point d'affixe  $z_3 = i \sin \alpha + ia$  et soit  $G$  l'isobarycentre des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$
- a- Vérifier que  $z_G = \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3}$  puis montrer que, pour  $\alpha \in ]0, \pi[$ , le point  $G$  appartient à une ellipse  $\Gamma$  dont on donnera une équation.
- b- Préciser les sommets et l'excentricité de  $\Gamma$  puis la construire dans le repère précédent.

### Corrigé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

- 1) a- Soit  $a$  un nombre réel, résolvons dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue  $z$  :

$$(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$$

$$\Delta = (-2(a+1))^2 - 4(1+i)(-1+i)(a^2+1) = -4a^2 + 8a - 4 = -4(a^2 - 2a + 1) \quad \Delta = (2(a-1)i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions:

$$z_1 = \frac{2(a+1) + 2(a-1)i}{2(1+i)} = \frac{a+ai+1-i}{1+i} = a-i$$

$$z_2 = \frac{2(a+1) - 2(a-1)i}{2(1+i)} = \frac{a-ai+1+i}{1+i} = 1-ai$$

$$S = \{a-i, 1-ia\}$$

- b- Soient  $f$  et  $g$  les transformations données par leurs expressions complexes  $f: z \mapsto z' = 1 - iz$  et  $g: z \mapsto z'' = z - i$ . Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations  $f$  et  $g$ .

$$f(z) = -iz + 1 \quad \text{comme } |-i| = 1 \text{ et } -i \notin \mathbb{R}$$

Alors  $f$  est une rotation d'angle  $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe

$$\frac{1}{1-(-i)} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{Donc } \Omega \left( \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right)$$

$$g(z) = z - i$$

$g$  est la translation de vecteur d'affixe  $(-i)$ . C'est à dire le vecteur  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- 2) Les points  $I, M_1$  et  $M_2$  sont d'affixes respectives  $z_0 = 1 - i$ ,  $z_1 = 1 - ia$  et  $z_2 = a - i$  où  $a = e^{i\alpha}$ ,  $\alpha \in ]0, 2\pi[$

a) On a  $\frac{z_1 - z_{M_2}}{z_1 - z_{M_1}} = \frac{1 - i - a + i}{1 - i - 1 + ia} = \frac{1 - a}{i(-1 + a)} = -\frac{1}{i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc  $IM_1 = IM_2$  et  $(\overrightarrow{IM_1}, \overrightarrow{IM_2}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Alors le triangle  $IM_1M_2$  est rectangle en I, isocèle et direct.

b) Pour déterminer le lieu géométrique du point  $M_1$  lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $]0, \pi[$  on constate

que  $z_1 = 1 - ia \Rightarrow z_1 - 1 = -ie^{i\alpha} = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$

Alors  $\begin{cases} |z_1 - 1| = 1 \\ \arg(z_1 - 1) = \alpha - \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Soit A le point d'affixe  $z_A = 1$ . Alors  $\begin{cases} AM_1 = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{AM_1}) = \alpha - \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

Donc  $M_1$  appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

En plus  $0 < \alpha < \pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ , alors  $-\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \overrightarrow{AM_1}) < \frac{\pi}{2}$

Donc lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $]0, \pi[$ ,  $M_1$  décrit le demi-cercle  $(C_1)$  de centre A et de rayon 1, situé à droite de la droite d'équation  $x = 1$  d'extrémités exclues.

Pour le point  $M_2$  :

$z_2 = a - i \Leftrightarrow z_2 + i = a \Leftrightarrow z_2 + i = e^{i\alpha}$ . Alors  $\begin{cases} |z_2 + i| = 1 \\ \arg(z_2 + i) = \alpha \end{cases}$ .

Soit B le point d'affixe  $z_B = -i$ . Alors

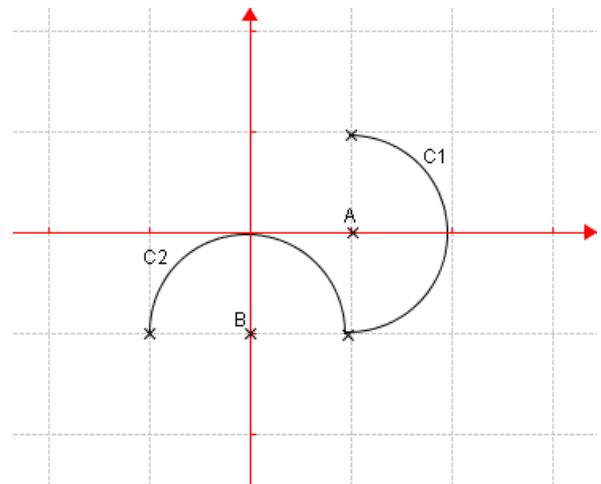
$\begin{cases} BM_2 = 1 \\ (\vec{u}, \overrightarrow{BM_2}) = \alpha [2\pi] \end{cases}$

$M_2$  appartient au cercle de centre B et de rayon.

D'autre part, lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $]0, \pi[$ ,

on a  $0 < (\vec{u}, \overrightarrow{BM_2}) < \pi [2\pi]$ .

Alors  $M_2$  décrit le demi-cercle  $(C_2)$  de centre B et de rayon 1, situé au dessus de la droite d'équation  $y = -1$  d'extrémités exclues.



c) Pour écrire  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle, on procède à des modifications d'écriture :

Pour  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$   $z_1 = 1 - ia \Rightarrow z_1 = 1 - ie^{i\alpha} = e^{i0} + e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$ .

Le module de  $z_1$  est  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ . Son argument dépend du signe de  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$  :

Lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , on a alors  $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$  et

$$-\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < 0 \text{ . D'où } \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\text{Donc } |z_1| = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \arg z_1 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{D'où la forme exponentielle de } z_1 \text{ est : } z_1 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$z_2 = -i + a = e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Le module de  $z_2$  est  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Son argument dépend du signe de  $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$  :

Lorsque  $\alpha$  décrit l'intervalle  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on a alors  $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$  et

$$\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \text{ . D'où } \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\text{Donc } |z_2| = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \arg z_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{D'où la forme exponentielle de } z_2 \text{ est : } z_2 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

3) Soit  $M_3$  le point d'affixe  $z_3 = i \sin \alpha + ia$

a) Le point G est l'isobarycentre des points  $M_1, M_2$  et  $M_3$ . On a alors :

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \\ z_G &= \frac{1 - ia + a - i + i \sin \alpha + ia}{3} \\ z_G &= \frac{1 + a - i + i \sin \alpha}{3} \\ z_G &= \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha - i + i \sin \alpha}{3} \\ z_G &= \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3} \end{aligned}$$

En posant  $z_G = x + iy$  on a alors :

$$G(x, y) \Rightarrow x + iy = \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \cos \alpha}{3} \\ y = \frac{-1 + 2 \sin \alpha}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cos \alpha \\ y + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \sin \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \frac{1}{3} = \cos \alpha \\ y + \frac{1}{3} = \sin \alpha \end{array} \right. \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \cos^2 \alpha \\ \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \sin^2 \alpha \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

Alors G appartient à l'ellipse d'équation  $\frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$  dans le repère  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

b) Le centre de  $\Gamma$  est le point  $\Omega\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .

Dans le repère  $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$  :

L'équation réduite de l'ellipse  $\Gamma$  est  $\frac{X^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$  ; avec  $\begin{cases} X = x - \frac{1}{3} \\ Y = y + \frac{1}{3} \end{cases}$

Les sommets de  $\Gamma$  sont :  $A\left(\frac{1}{3}; 0\right), A'\left(-\frac{1}{3}; 0\right), B\left(0; \frac{2}{3}\right), B'\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ .

Alors dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , les sommets de  $\Gamma$  ont pour coordonnées :

$$A\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right), A'\left(0; -\frac{1}{3}\right), B\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), B'\left(\frac{1}{3}; -1\right).$$

Pour calculer l'excentricité on a  $e = \frac{c}{b}$  avec  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$ ,  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = \frac{2}{3}$ .

$$\text{Donc } c = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ D'où } e = \frac{c}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

### Exercice 4 (Bac 2017 sc)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1) On considère l'équation (E) :  $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$

- a) Vérifier que l'équation (E) admet une solution réelle à déterminer.  
 b) Déterminer les deux autres solutions de l'équation (E).  
 c) Placer les points A, B et C d'affixes respectives :  $-2$ ,  $2-2i$  et  $1+i$ . Déterminer la nature du triangle ABC.

2) Soit  $s$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M(x;y)$  associe le point  $M'(x';y')$  tel que  $x' = x + y$  et  $y' = -x + y - 2$

- a) Donner l'expression complexe de  $s$ .  
 b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de  $s$ . Déterminer  $s(C)$   
 3) On désigne par  $z_G$  l'affixe du point  $G$ , centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe  $z$  on

pose :  $f(z) = |z+2|^2 + |z-2+2i|^2 + |z-1-i|^2$

- a) Justifier que  $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$  et que  $f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$   
 b) Déterminer, suivant les valeurs du réel  $k$ , l'ensemble  $\Gamma_k$  des points M du plan d'affixes  $z$  tels que :  $f(z) = k$ .  
 Déterminer l'ensemble  $\Gamma_{20}$ .

### Corrigé

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

1) On considère l'équation

(E) :  $iz^3 - (1+i)z^2 - (2+2i)z + 8i = 0$

a) Vérifions que l'équation (E) admet une solution réelle

Si  $a$  est une solution réelle de l'équation (E) alors

$$ia^3 - (1+i)a^2 - (2+2i)a + 8i = 0$$

$$ia^3 - a^2 - ia^2 - 2a - 2ia + 8i = 0$$

$$-a^2 - 2a + i(a^3 - a^2 - 2a + 8) = 0$$

$$\begin{cases} -a^2 - 2a = 0 & \text{(i)} \\ a^3 - a^2 - 2a + 8 = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Donc de (i) : soit  $a = 0$  ou  $a = -2$  or  $-2$  vérifie (ii) et  $0$  ne vérifie pas (ii)

Donc l'équation (E) admet la solution réelle  $a = -2$

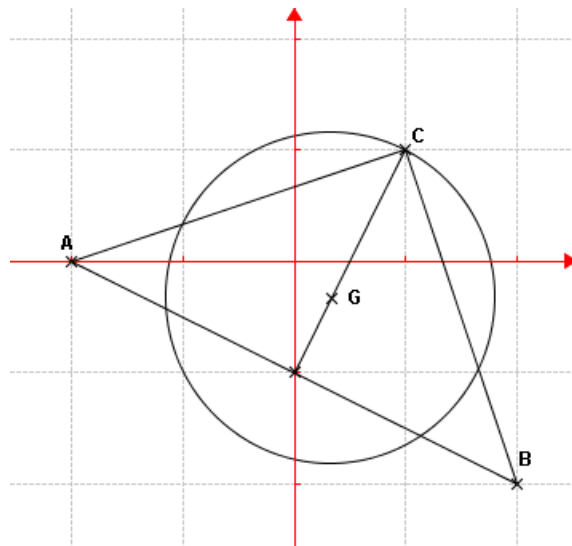
a) Déterminons les deux autres solutions de l'équation (E), pour cela utilisons le tableau d'Horner :

	$i$	$-1-i$	$-2-2i$	$8i$
$-2$		$-2i$	$2+6i$	$-8i$
	$i$	$-1-3i$	$4i$	$0$

Alors (E) :  $(z+2)(iz^2 - (1+3i)z + 4i) = 0$

Donc : soit  $z+2 = 0$  et  $z = -2$

Ou  $iz^2 - (1+3i)z + 4i = 0$



$$\Delta = (1 + 3i)^2 + 16 = 8 + 6i = (3 + i)^2$$

Et les solutions de l'équation (E) autre que  $(-2)$  sont  $z_1 = 2 - 2i$  et  $z_2 = 1 + i$

b) Plaçons les points A, B et C d'affixes respectives :  $-2$ ;  $2 - 2i$  et  $1 + i$

La nature du triangle ABC

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-2 - (1 + i)}{2 - 2i - (1 + i)} = \frac{-3 - i}{1 - 3i} = \frac{-i(-3i + 1)}{1 - 3i} = i$$

Puisque  $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$  alors le triangle ABC est rectangle et isocèle, direct en C

2) Soit  $s$  l'application du plan dans lui-même qui à tout point  $M(x; y)$  associe le point  $M'(x'; y')$  tel que  $x' = x + y$  et  $y' = -x + y - 2$

a) L'expression complexe de  $s$  :

Si  $M(x; y)$  est un point d'affixe  $z$  dont l'image par  $s$  est le point  $M'(x'; y')$  d'affixe  $z'$  alors

$$\begin{aligned} x' + iy' &= x + y + i(-x + y - 2) \\ &= x + y - ix + iy - 2i \\ &= x + iy - ix + y - 2i \\ &= x(1 - i) + iy(1 - i) - 2i \\ &= (1 - i)[x + iy] - 2i \end{aligned}$$

Alors l'expression complexe de  $s$  est :

$$z' = (1 - i)z - 2i$$

Pour déterminer  $s(C)$  on a  $z'_C = (1 - i)z_C - 2i = (1 - i)(1 + i) - 2i = 2 - 2i = z_B$ . Alors  $s(C) = B$ .

b) La nature et les éléments caractéristiques de  $s$  :

$$\text{On a } z' = (1 - i)z - 2i \text{ et } \begin{cases} |1 - i| = \sqrt{2} \\ \arg(1 - i) = \frac{-\pi}{4} [2\pi] \end{cases}$$

Alors  $s$  est une similitude directe de rapport  $k = \sqrt{2}$  et d'angle  $\alpha = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$  et son centre est d'affixe

$$w = \frac{-2i}{1 - (1 - i)} = \frac{-2i}{i} = -2 = z_A \text{ le centre de } s \text{ est } A$$

Donc  $s$  est la similitude directe de centre A, rapport  $k = \sqrt{2}$  et d'angle  $\alpha = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$

1) On désigne par  $z_G$  l'affixe du point G, centre de gravité du triangle ABC, et pour tout nombre complexe

$$z \text{ on pose : } f(z) = |z + 2|^2 + |z - 2 + 2i|^2 + |z - 1 - i|^2$$

a) Montrons que  $z_G = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$  et que  $f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$

On sait que G est le centre de gravité du triangle ABC, d'où l'affixe de G est

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-2 + 2 - 2i + 1 + i}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$$

Calculons  $f(z)$  :

$$\text{On a : } f(z) = |z + 2|^2 + |z - 2 + 2i|^2 + |z - 1 - i|^2$$

Alors  $f(z) = MA^2 + MB^2 + MC^2$  donc  $f$  est la fonction scalaire de Leibniz associée au système  $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$  et l'écriture réduite de  $f$  est  $f(z) = 3MG^2 + f(z_G)$

$$\text{Or } f(z_G) = \frac{f(z_A) + f(z_B) + f(z_C)}{2(1+1+1)}$$

$$\text{Puisque } f(z_A) = AB^2 + AC^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2 = |2 - 2i + 2|^2 + |1 + i + 2|^2 = 20 + 10 = 30$$

$$f(z_B) = BA^2 + BC^2 = 20 + 10 = 30$$

$$f(z_C) = CA^2 + CB^2 = 10 + 10 = 20$$

$$\text{Donc } f(z_G) = \frac{80}{6} = \frac{40}{3} \text{ et } f(z) = 3MG^2 + \frac{40}{3}$$

$$\text{Finalement } f(z) = 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3}$$

c) Déterminons, suivant les valeurs du réel  $k$ , l'ensemble  $\Gamma_k$  des points  $M$  du plan d'affixes  $z$  tels que :  
 $f(z) = k$

$$f(z) = k \Leftrightarrow 3 \left| z - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \right|^2 + \frac{40}{3} = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + \frac{40}{3} = k$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{3k - 40}{9} \text{ Alors}$$

- Si  $k < \frac{40}{3}$  alors l'ensemble  $\Gamma_k$  est vide

- Si  $k = \frac{40}{3}$  alors l'ensemble  $\Gamma_k$  est réduit au point  $G$

- Si  $k > \frac{40}{3}$  alors  $\Gamma_k$  est le cercle de centre  $G$  et de rayon  $\sqrt{\frac{3k - 40}{9}}$

Déterminons l'ensemble  $\Gamma_{20}$

Comme  $20 > \frac{40}{3}$ ,  $\Gamma_{20}$  est donc un cercle de centre  $G$ . Or  $f(z_C) = 20$  alors  $C \in \Gamma_{20}$  par conséquent  $\Gamma_{20}$  est le cercle de centre  $G$  passant par  $C$ .