

Exercice 1 Bac 2017 sn

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f .

b- Dédire que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle

$[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n

c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge.

2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$

b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale :

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad n \geq 2.$$

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose :

$$S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$$

a- Montrer que $S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}$

b- En déduire que : $\frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{n + (n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2 + 3\ln 2}{4} - \frac{1 + \ln(n)}{n}$

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

c- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$

d- Exprimer (u_n) en fonction de I_n . En déduire la limite de (u_n) .

Solution

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Le tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln x = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x} \right) = 0^+$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ car quotient de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \times \ln x}{(x^2)^2}$$

$$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}, ,$$

Or $x^3 > 0$ donc $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \sqrt{e}$

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2e}$	0

a- Montrons que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n :

- La restriction de f sur l'intervalle $I = [1, \sqrt{e}]$ est continue et strictement croissante et $f(I) = J = \left[0, \frac{1}{2e}\right]$.

- De plus $\forall n \geq 6, 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{2e}$; $\left(\frac{1}{6} \approx 0,167 < \frac{1}{2e} \approx 0,184\right)$. Alors

$$\forall n \geq 6, \frac{1}{n} \in J = \left[0, \frac{1}{2e}\right].$$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n

c- Montrons que la suite (a_n) est décroissante, et qu'elle converge :

On a $\forall n \geq 6, \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ or $\forall n \geq 6, \frac{1}{n} = f(a_n)$ et $\frac{1}{n+1} = f(a_{n+1})$ donc $f(a_n) > f(a_{n+1})$

et comme f est strictement croissante sur $[1, \sqrt{e}]$ alors $a_n > a_{n+1}$ et la suite (a_n) est strictement décroissante.

D'autre part $a_n \in [1, \sqrt{e}]$ donc la suite (a_n) est décroissante et minorée par 1 d'où elle converge.

2) a- Montrons que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a :

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$

Soit k un entier strictement supérieur à 1 alors $k \geq 2$ et :

$$\forall x \in [k, k+1], k \leq x \leq k+1$$

Or f est décroissante sur $[2, +\infty[$ donc $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} < \frac{\ln(x)}{x^2} < \frac{\ln(k)}{k^2} \text{ donc } \int_k^{k+1} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx < \int_k^{k+1} \frac{\ln(k)}{k^2} dx$$

$$\text{Soit } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x^2} dx \leq \frac{\ln(k)}{k^2} \int_k^{k+1} dx$$

$$\text{Par conséquent } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$

b- Utilisons une intégration par parties pour exprimer en fonction de n

l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$, $n \geq 2$.

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \text{ Alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx &= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^n + \int_2^n \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x} \right]_2^n \\ &= \frac{-\ln n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n} \end{aligned}$$

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose :

$$S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}.$$

$$\text{a- Montrons que } S_n - \frac{\ln(2)}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$$

$$\text{D'après 2) a) on a : } \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln(3)}{3^2} \leq \int_2^3 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 2}{2^2} \\ \frac{\ln(4)}{4^2} \leq \int_3^4 \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln 3}{3^2} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\ln n}{n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln(n-1)}{(n-1)^2} \end{array} \right.$$

En additionnant membre à membre on obtient :

$$\sum_{k=3}^n \frac{\ln(k)}{k^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k^2} \quad \text{Donc : } \boxed{S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}}$$

b- Montrons que $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4} - \frac{1+\ln(n)}{n}$

D'après la question 2.b) on a : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

De la question précédente on a : $S_n - \frac{\ln(2)}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{n^2}$

- La première inégalité s'écrit : $S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$

$$\text{Donc } S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$$

- La seconde inégalité : $S_n \geq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx + \frac{\ln(n)}{n^2}$

$$\text{Donc } S_n \geq \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2}$$

Alors $\frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{\ln(2)}{2^2} + \frac{1+\ln 2}{2} - \frac{1+\ln n}{n}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$

a- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$

$$\forall x \in [1;2], 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \ln x \leq \ln 2 \Rightarrow 0 \leq (\ln x)^n \leq (\ln 2)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

D'autre part $\forall x \in [1;2], 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2} \leq 1$

Par produit $0 \leq \frac{(\ln x)^n}{x^2} \leq (\ln 2)^n$

Par intégration de 1 à 2 : $0 \leq \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \leq \int_1^2 (\ln 2)^n dx$

$$\text{et } 0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx \leq \frac{1}{n!} (\ln 2)^n \int_1^2 dx$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$$

Pour la limite de I_n , comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$ car $-1 < \ln 2 < 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

$$\text{b) Montrons que : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{On a } I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \cdot \text{Alors } \begin{cases} u'(x) = (n+1) \frac{1}{x} (\ln x)^n \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[-\frac{(\ln x)^{n+1}}{x} \right]_1^2 + \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx, \text{ d'où } I_{n+1} = -\frac{(\ln 2)^{n+1}}{2(n+1)!} + I_n$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\text{c) Montrons que : } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$$

$$\text{Nous savons que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} I_2 = I_1 - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^2}{(2)!} \\ I_3 = I_2 - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^3}{3!} \\ I_4 = I_3 - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^4}{4!} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^n}{n!} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = I_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{(\ln 2)^2}{2!} + \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$$

Or d'après 2.b) on a : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{1 + \ln n}{n}$, donc

$$I_1 = - \int_2^1 \frac{\ln x}{x^2} dx = - \frac{1 + \ln 2}{2} + \frac{1 + \ln 1}{1} = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 2}{1!} \right)$$

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$$

Remarque : on peut établir une démonstration par récurrence.

d) Exprimons (u_n) en fonction de I_n :

On sait que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right] = I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \left[\frac{1}{1!} + \frac{(\ln 2)^1}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^{n-1}}{n!} \right]$$

$$\text{Donc } I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} u_n \ln 2 \text{ alors } 2I_n = 1 - u_n \ln 2 \Rightarrow u_n \ln 2 = 1 - 2I_n \text{ et}$$

$$u_n = \frac{1 - 2I_n}{\ln 2}$$

- La limite de (u_n) :

$$u_n = \frac{1 - 2I_n}{\ln 2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{\ln 2}.$$

Exercice 2

(Bac 2015 sn)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

2.a) Vérifier que le point $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) .

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$.

c) Tracer les courbes (C) et (C') .

d) Calculer, en fonction de α , l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C') , et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1}$).

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^\alpha f^n(t) dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

- a) Justifier que $I_1 = \alpha + \ln(2\alpha)$.
- b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$.
- c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\alpha^n - \frac{1}{2^n} \right)$.
- d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ?
- 4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n$.
- b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k} \right)$.

Solution

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$1.a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Interprétation graphique :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow (C)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow (C)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $+\infty$.

b) $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$. On constate que $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	
f	1	0

f est continue,
et strictement décroissante sur \mathbb{R} ,
 $f(\mathbb{R}) =]0;1[$

Alors $f : \mathbb{R} \rightarrow]0;1[$ est bijective ; $J =]0;1[$

Pour exprimer $f^{-1}(x)$, on pose $y = f(x)$.

$$\text{On a : } y = \frac{1}{1+e^x} \Leftrightarrow y(1+e^x) = 1 \Leftrightarrow y + ye^x = 1 \Leftrightarrow ye^x = 1-y \Leftrightarrow e^x = \frac{1-y}{y}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1-y}{y}\right). \text{ D'où } f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right), x \in]0;1[$$

2.a) On vérifie une égalité du type $f(2a-x) + f(x) = 2b$ avec $(a,b) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{On a : } f(2a-x) = f(-x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \times \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$\text{Donc , } f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{1+e^x}$$

$$f(2a-x) + f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+1} = 1 = 2 \times \frac{1}{2} = 2b$$

D'où $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C).

b) Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
S'il se coupent en un point d'abscisse x , alors x vérifie $f(x) = x$, soit $f(x) - x = 0$.

On pose $V(x) = f(x) - x$

V est dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} , avec $V'(x) = f'(x) - 1$.

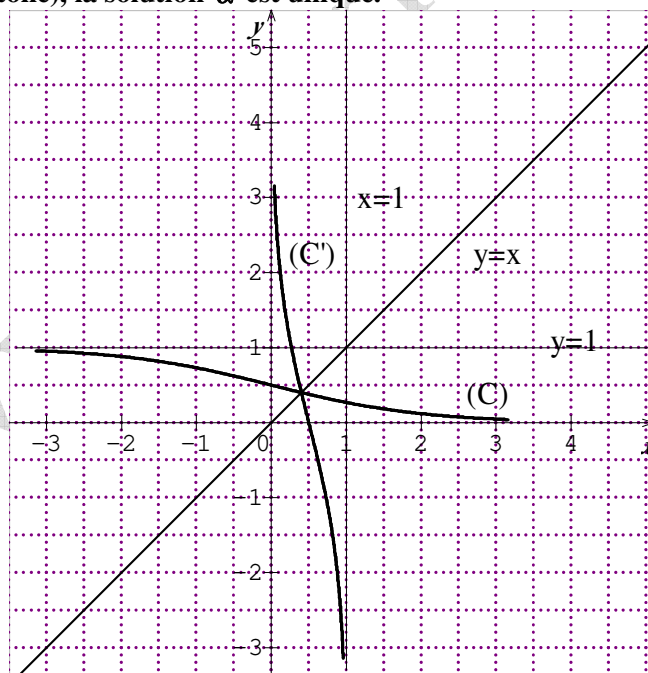
$$V'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} - 1 = -\left(1 + \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right).$$

Il est clair que pour tout x de \mathbb{R} , $V'(x) < 0$. D'où V est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

On a

$$\begin{cases} V(0,4) \approx 1,3 \times 10^{-3} > 0 \\ V(0,5) \approx -0,12 < 0 \end{cases}$$

Donc $V(0,4) \times V(0,5) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $V(x) = 0$ admet une solution α telle que $0,4 < \alpha < 0,5$. (V est continue sur $[0,4; 0,5]$ et change de signe). D'après le théorème de la bijection réciproque (V est continue et strictement monotone), la solution α est unique.



d) Par symétrie, l'aire cherchée A est égale au double de l'aire comprise entre (C), la droite $y = x$ et les droites verticales d'équations $x = \alpha$ et $x = 0$ (l'axe Oy).

$$A = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx$$

$$A = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx$$

$$A = 2 \int_0^\alpha \left(\frac{1}{e^x + 1} - x \right) dx$$

$$A = 2 \int_0^\alpha \left(\frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} - x \right) dx$$

$$A = -2 \int_0^\alpha \left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x} + 1} + x \right) dx$$

$$A = -2 \left[\ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^\alpha$$

$$A = -2 \left[\ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{2} x^2 \right]_0^\alpha$$

$$A = -2 \left(\ln(1 + e^{-\alpha}) + \frac{1}{2} \alpha^2 - \ln 2 \right)$$

$$A = -2 \ln \left(\frac{1 + e^{-\alpha}}{2} \right) - \alpha^2$$

$$A = -2 \ln \left(\frac{1 + e^\alpha}{2e^\alpha} \right) - \alpha^2 \text{ en unité d'aire.}$$

3) On a $I_n = \int_0^\alpha f^n(t) dt$

a) $I_1 = \int_0^\alpha f(t) dt$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t + 1} dt$$

$$I_1 = \int_0^\alpha \frac{1}{e^t + 1} \times \frac{e^{-t}}{e^{-t}} dt$$

$$I_1 = - \int_0^\alpha \frac{-e^{-t}}{1 + e^{-t}} dt$$

$$I_1 = \left[-\ln(1 + e^{-t}) \right]_0^\alpha$$

$$I_1 = -\ln(1 + e^{-\alpha}) + \ln 2$$

$$I_1 = -\ln \left(\frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha} \right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln \left(\frac{1}{e^\alpha + 1} e^\alpha \right) + \ln 2$$

$$I_1 = \ln(\alpha e^\alpha) + \ln 2 \text{ car } f(\alpha) = \alpha \Rightarrow \frac{1}{e^\alpha + 1} = \alpha$$

$$I_1 = \ln(\alpha) + \ln e^\alpha + \ln 2$$

$$I_1 = \alpha + \ln(2\alpha).$$

3.a) On a : $f'(x) = \frac{-e^x}{(1 + e^{-x})^2}$.

$$\begin{aligned} f^2(x) - f(x) &= \frac{1}{(1 + e^x)^2} - \frac{1}{1 + e^x} \times \frac{1 + e^x}{1 + e^x} \\ &= \frac{1}{(1 + e^x)^2} - \frac{1 + e^x}{(1 + e^x)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} = f'(x)$$

Donc : $f'(x) = f^2(x) - f(x)$

c) D'après b), en multipliant par $f^{n-1}(x)$ on obtient : $f'(x)f^{n-1}(x) = f^{n+1}(x) - f^n(x)$

Par intégration de 0 à α : $\int_0^\alpha f'(x)f^{n-1}(x)dx = \int_0^\alpha f^{n+1}(x)dx - \int_0^\alpha f^n(x)dx$

$$\left[\frac{1}{n} f^n(x) \right]_0^\alpha = I_{n+1} - I_n$$

$$\frac{1}{n} (f^n(\alpha) - f^n(0)) = I_{n+1} - I_n$$

$$\frac{1}{n} \left(\alpha^n - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = I_{n+1} - I_n$$

$$I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\alpha^n - \frac{1}{2^n} \right)$$

d) On a $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel non nul n , f^n est continue et positive sur $[0, \alpha]$. Alors $\int_0^\alpha f^n(t)dt \geq 0$. D'où $I_n \geq 0$. Donc (I_n) est positive.

D'autre part, pour tout entier naturel non nul n on a :

$$0 < \alpha < 0,5 \Rightarrow 0 < \alpha^n < \left(\frac{1}{2} \right)^n \Rightarrow \alpha^n < \frac{1}{2^n} \Rightarrow \alpha^n - \frac{1}{2^n} < 0 \Rightarrow I_{n+1} - I_n < 0$$

D'où (I_n) est décroissante.

On en déduit que la suite (I_n) est convergente, car décroissante et minorée.

Remarque : Toute suite positive est minorée par 0, et toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

4.a) On sait que f est décroissante sur \mathbb{R} . Donc, si $0 \leq t \leq \alpha$, on a : $f(\alpha) \leq f(t) \leq f(0)$

$$\text{donc } \alpha \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \text{ et } \alpha > 0 \Rightarrow 0 < \alpha^n \leq f^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha \alpha^n dt \leq \int_0^\alpha f^n(t)dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n} dt$$

$$\alpha^n [t]_0^\alpha \leq I_n \leq \frac{1}{2^n} [t]_0^\alpha$$

$$\alpha^n (\alpha - 0) \leq I_n \leq \frac{1}{2^n} (\alpha - 0)$$

$$\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

Comme $0 < \alpha < 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^{n+1} = 0$. On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$

Alors d'après le théorème de gendarme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0$

$$\text{b) On a pour tout } n > 0 : I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n} \left(\alpha^n - \frac{1}{2^n} \right)$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour } n=1 : I_2 - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \\ \text{pour } n=2 : I_3 - I_2 = \frac{1}{2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) \\ \text{pour } n=3 : I_4 - I_3 = \frac{1}{3} \left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \text{pour } n-1 : I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1} \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \end{array} \right.$$

Par addition membre à membre et simplification :

$$I_n - I_1 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\alpha^2 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{3} \left(\alpha^3 - \frac{1}{2^3}\right) + \dots + \frac{1}{n-1} \left(\alpha^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$$

$$I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right).$$

On peut écrire $I_n - (\alpha + \ln(2\alpha)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right).$

Par passage aux limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha + \ln(2\alpha)) = \alpha + \ln(2\alpha)$ car indépendant de n ; on en déduit

que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right) = -(\alpha + \ln(2\alpha)).$

Exercice 3 (Bac 2015 sn)

1) On considère la fonction numérique g définie sur \mathbb{R}^* par :

$$g(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

a) Déterminer a , b et c tels que pour tout x de \mathbb{R}^* : $g(x) = \frac{(x-1)(ax^2 + bx + c)}{x(x^2 - 4x + 5)}$.

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur \mathbb{R}^* .

2) On considère la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = 3x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D , est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D .

- 3.a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f .
- b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} .
- c) Construire (C).
- 4) On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 3x - 3$, $x = 3$ et $x = 2 + \sqrt{3}$.
- a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 5} = 2 \left(1 + \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} - \frac{1}{1 + (x - 2)^2} \right)$.
- b) Calculer $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} dx$.
- c) En posant $x = 2 + \tan t$ pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$; calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1 + (x - 2)^2} dx$.
- d) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_2^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5) dx$ et $K = 2 \int_2^{2+\sqrt{3}} \ln x dx$. En Déduire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire.

Solution

1.a) Pour la transformation d'écriture de $g(x)$, on factorise le dénominateur et le numérateur :

On factorise le dénominateur par x : $x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$

Pour factoriser le numérateur on peut utiliser la division euclidienne, l'identification ou le tableau d'Horner :

	3	-12	19	-10
1	3	-9	10	
	3	-9	10	0

Alors $3x^3 - 12x^2 + 19x - 10 = (x - 1)(3x^2 - 9x + 10)$.

Donc on a pour tout x de \mathbb{R}^* : $g(x) = \frac{(x - 1)(3x^2 - 9x + 10)}{x(x^2 - 4x + 5)}$;

Alors : $a = 3, b = -9$ et $c = 10$.

b) Les discriminants des trinômes $3x^2 - 9x + 10$ et $x^2 - 4x + 5$ sont négatifs : $\Delta_1 = -39$ et $\Delta_2 = -4$. Les coefficients de x^2 sont positifs. On en déduit que pour tout x de \mathbb{R}^* :

$3x^2 - 9x + 10 > 0$ et $x^2 - 4x + 5 > 0$. D'où le signe de $g(x)$ est celui de $\frac{x - 1}{x}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-	0	+	+
x - 1	-	-	0	+
$\frac{x - 1}{x}$	+	-	0	+
g(x)	+	-	0	+

2.a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} (3x - 3) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} \right) = +\infty$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$. La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

b) On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x - 3)$. D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

c) D'après a), la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

De plus $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (3x - 3)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) = 0$, donc la courbe (C) admet une asymptote oblique D d'équation $y = 3x - 3$.

Pour étudier la position relative de (C) et de D, on étudie le signe de

$$d(x) = f(x) - y = f(x) - (3x - 3)$$

$$d(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right).$$

On rappelle que le signe de $\ln t$ est celui de $t - 1$ pour tout $t > 0$. Alors le signe de

$$d(x) = \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right) \text{ est celui de } \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} - 1.$$

$$\text{Par réduction au même dénominateur : } \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2} - 1 = \frac{x^2 - 4x + 5 - x^2}{x^2} = \frac{-4x + 5}{x^2}$$

Donc le signe de $d(x)$ est celui de $-4x + 5$ car $x^2 > 0$.

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{4}$	$+\infty$
$-4x + 5$	+	+	0	-
d(x)	+	+	0	-
P.R	C/D	C/D	0	D/C

$$\text{Pour } x = \frac{5}{4} \text{ on a } y = 3 \times \frac{5}{4} - 3 = \frac{3}{4}.$$

Alors l'asymptote D coupe la courbe (C) au point $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$.

3.a) On peut écrire $f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2 - 4x + 5) - \ln(x^2)$

$$f(x) = 3x - 3 + \ln(x^2 - 4x + 5) - 2\ln x. \text{ Donc } f'(x) = 3 + \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5} - \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 3 + \frac{(2x - 4)x - 2(x^2 - 4x + 5)}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^3 - 4x^2 + 5x) + 2x^2 - 4x - 2x^2 + 8x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 15x + 4x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

$$f'(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

Enfin $f'(x) = g(x)$.

Tableau de variation de f :

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

b) Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on a $f(x) \geq \ln 2 > 0$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans cet intervalle.

Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la restriction de f est continue, strictement monotone et change de signe car $0 \in f(]-\infty, 0[) =]-\infty, +\infty[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans cet intervalle.

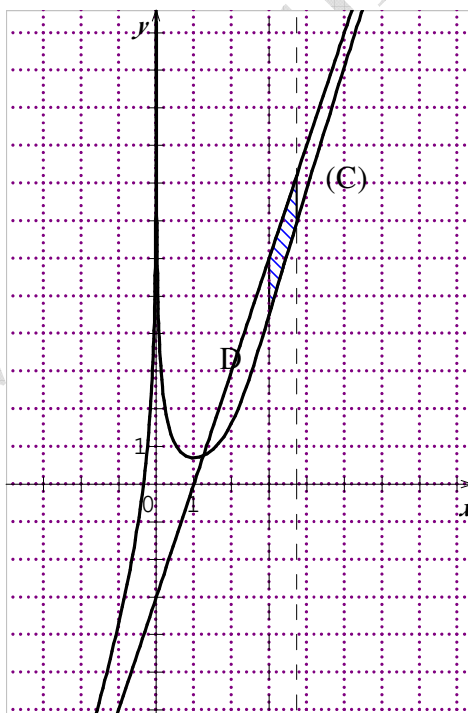
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans \mathbb{R}^* .

Pour encadrer α :

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -6 + \ln 10 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < \alpha < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,5) = -4,5 + \ln 29 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow -0,5 < \alpha < 0 \quad \text{C'est un encadrement de } \alpha \text{ d'amplitude } 5 \times 10^{-1}$$

c) Construction de (C)



4.a) On a

$$\begin{aligned}
2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right) &= 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+x^2-4x+4}\right) \\
&= 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{x^2-4x+5}\right) \\
&= 2\left(1 + \frac{2x-4-1}{x^2-4x+5}\right) \\
&= 2\left(\frac{x^2-4x+5+2x-5}{x^2-4x+5}\right) \\
&= 2\left(\frac{x^2-2x}{x^2-4x+5}\right) \\
&= \frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5}
\end{aligned}$$

Alors $\frac{2x^2-4x}{x^2-4x+5} = 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right)$.

b) $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx = \left[\ln|x^2-4x+5|\right]_3^{2+\sqrt{3}}$ car une primitive de fonction du type $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

En remplaçant par les bornes :

$$A = \ln|(2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5| - \ln|(3)^2 - 4(3) + 5| = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2.$$

c) En posant $x = 2 + \tan t$ avec $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; on a :

$$\begin{cases} x = 3 \Leftrightarrow 2 + \tan t = 3 \Leftrightarrow \tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 2 + \tan t = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$x = 2 + \tan t \Rightarrow dx = (1 + \tan^2 t) dt$$

$$x = 2 + \tan t \Rightarrow 1 + (x-2)^2 = 1 + \tan^2 t$$

Pour calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx$, on remplace avec le changement de variable :

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 t} (1+\tan^2 t) dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx = \left[t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Enfin $B = \frac{\pi}{12}$

d)

i) Pour calculer $J = \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5) dx$ à l'aide d'une intégration par parties,

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = \ln(x^2 - 4x + 5) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{2x-4}{x^2-4x+5} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\text{D'où } J = \left[x \ln(x^2 - 4x + 5) \right]_3^{2+\sqrt{3}} - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx$$

On remplace dans la première partie par les borne, et dans l'intégrale par l'expression trouvée en 4.a) :

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln\left((2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 5\right) - 3 \ln\left((3)^2 - 4(3) + 5\right) - \int_3^{2+\sqrt{3}} 2 \left(1 + \frac{2x-4}{x^2-4x+5} - \frac{1}{1+(x-2)^2}\right) dx$$

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln 4 - 3 \ln 2 - 2 \left(\int_3^{2+\sqrt{3}} dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx - \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1+(x-2)^2} dx \right)$$

D'après 4.b) et 4.c) on obtient :

$$J = (2+\sqrt{3}) \ln 2^2 - 3 \ln 2 - 2 \left(\left[x \right]_3^{2+\sqrt{3}} + A - B \right)$$

$$J = 2(2+\sqrt{3}) \ln 2 - 3 \ln 2 - 2 \left(2+\sqrt{3} - 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3}) \ln 2 - 2 \left(-1 + \sqrt{3} + \ln 2 - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$J = (1+2\sqrt{3}) \ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} - 2 \ln 2 + \frac{\pi}{6}$$

$$J = (-1+2\sqrt{3}) \ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$

ii) Pour calculer $K = 2 \int_2^{2+\sqrt{3}} \ln x dx$ à l'aide d'une intégration par parties,

$$\text{on pose } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{Alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\text{D'où } K = 2 \left(\left[x \ln x \right]_2^{2+\sqrt{3}} - \int_2^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{x} dx \right)$$

$$K = 2 \left(\left[x \ln x \right]_2^{2+\sqrt{3}} - \int_2^{2+\sqrt{3}} dx \right)$$

$$K = 2 \left(\left[x \ln x \right]_2^{2+\sqrt{3}} - \left[x \right]_2^{2+\sqrt{3}} \right)$$

$$K = 2 \left(\left[x \ln x - x \right]_2^{2+\sqrt{3}} \right)$$

$$K = 2 \left((2+\sqrt{3}) \ln(2+\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) - 3 \ln 3 + 3 \right)$$

$$K = 2 \left((2+\sqrt{3}) \ln(2+\sqrt{3}) + 1 - \sqrt{3} - 3 \ln 3 \right)$$

$$K = (4+2\sqrt{3}) \ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6 \ln 3$$

iii) Pour calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 3x - 3$, $x = 3$ et $x = 2 + \sqrt{3}$; on remarque que pour $x \geq 3$, la droite d'équation $y = 3x - 3$ est au dessus de la courbe.

$$\text{Alors } S = \int_3^{2+\sqrt{3}} (y-f(x))dx = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)dx$$

$$S = -\int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2-4x+5)dx + \int_3^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2)dx. \quad \text{Donc } S = -J+K$$

$$S = -\left((-1+2\sqrt{3})\ln 2 + 2 - 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \left((4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3\right)$$

$$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 - 2 + 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) + 2 - 2\sqrt{3} - 6\ln 3$$

$$S = (1-2\sqrt{3})\ln 2 + (4+2\sqrt{3})\ln(2+\sqrt{3}) - 6\ln 3 - \frac{\pi}{6} \text{ en unité d'aire.}$$

$$S \approx 1,0066 \text{ en unité d'aire.}$$

Exercice 4

(Bac 2017 sc)

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on définit la fonction f_n sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = (\ln x)^n$ et on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et discuter $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n .

b) Calculer $f'_n(x)$ dérivée de $f_n(x)$ et dresser le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n)

2.a) Etudier les positions relatives de (C_2) et (C_3)

b) Construire (C_2) et (C_3) dans le même repère.

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x)dx$ et

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

3.a) Montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$ (on procédera par intégration par parties).

b) Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a :

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$$

c) Vérifier que $I_2 = -1 + e.u_2$

c) En déduire que $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e.u_n$

4.a) Montrer que : $\forall x \in [1; e], 0 \leq f_n(x) \leq 1$. Déduire que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$

b) Déduire la limite de (I_n) puis celle de (u_n)

Solution

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, la fonction f_n est définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = (\ln x)^n$ et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1.a) Calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^n = +\infty$$

Discussion de $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n : comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ alors :

Si n est pair : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = +\infty$

Si n est impair : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$

b) Calcul de $f'_n(x)$ dérivée de $f_n(x)$ et le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n) :

La dérivée de $f_n(x)$ est : $f'_n(x) = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$

Si n est impair alors $n-1$ est pair, et par conséquent $(\ln x)^{n-1} \geq 0$, d'où le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Si n est pair alors $n-1$ est impair, d'où le signe de $(\ln x)^{n-1}$ est celui de $\ln x$, d'où le tableau de variation :

X	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2.a) Etudier les positions relatives de (C_2) et (C_3) et pour cela étudions le signe de $f_3(x) - f_2(x)$:

$$f_3(x) - f_2(x) = (\ln x)^3 - (\ln x)^2 = (\ln x)^2 (\ln x - 1)$$

Donc :

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)^2$	+	0	+	+
$(\ln x - 1)$	-	-	0	+
$f_3(x) - f_2(x)$	-	0	-	+
Positions relatives	$(C_2)/(C_3)$	PI	$(C_2)/(C_3)$	PI $(C_3)/(C_2)$

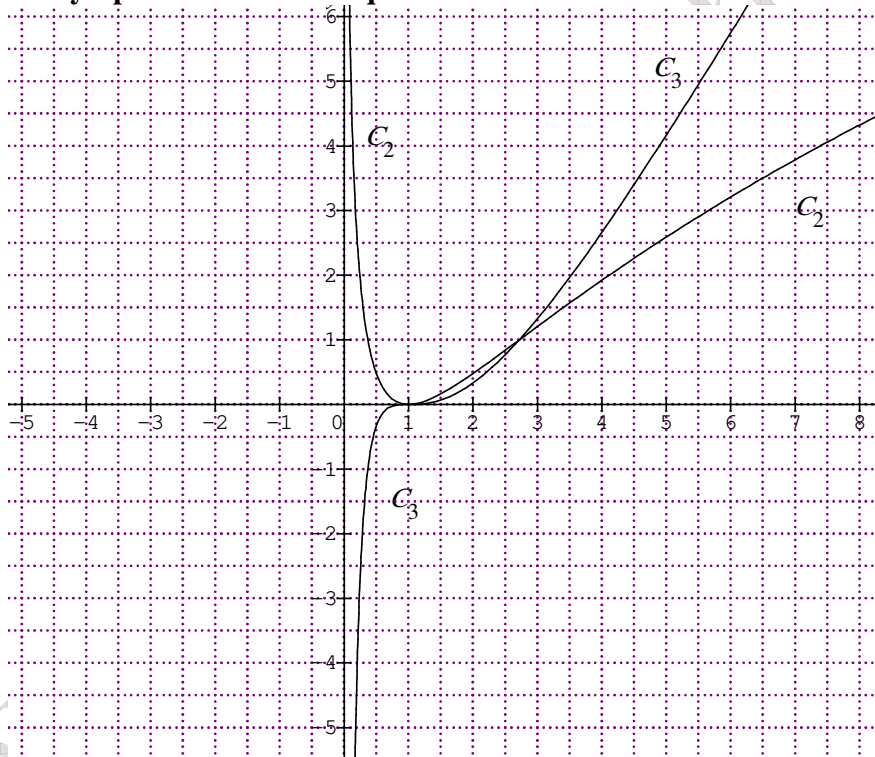
b) Construction (C_2) et (C_3) dans le même repère :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_3(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = 0$ alors chacune des courbes (C_2) et (C_3) admet

une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_3(x) = -\infty$, alors chacune des courbes (C_2) et (C_3)

admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$



Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose :

$$I_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \text{ et } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

3) a) Utilisons une intégration par parties pour montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$

$$I_2 = \frac{(-1)^1}{2!} \int_1^e f_2(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$\text{On pose : } u(x) = (\ln x)^2 \Rightarrow u'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\text{Alors } I_2 = \frac{1}{2} \left(\left[x(\ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) = \frac{1}{2} e - 0 - \int_1^e \ln x dx$$

Calculons $\int_1^e \ln x dx$: On utilise une intégration par parties

$$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \int_1^e \ln x dx &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e dx \\ &= e - (e - 1) = 1. \text{ Donc } I_2 = \frac{e-2}{2} \end{aligned}$$

b) Montrons que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a :

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$$

$$\text{On a : } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^e f_{n+1}(x) dx$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^e (\ln x)^{n+1} dx$$

Utilisons une intégration par parties :

$$\text{On pose } u(x) = (\ln x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = \frac{(n+1)(\ln x)^n}{x}$$

$$v'(x) = 1 \Rightarrow v(x) = x$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\left[x(\ln x)^{n+1} \right]_1^e - (n+1) \int_1^e (\ln x)^n dx \right)$$

$$I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(e - (n+1) \frac{n!}{(-1)^n} I_n \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(e + \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}} I_n \right)$$

$$\text{Donc } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$$

c) Vérifions que $I_2 = -1 + e \cdot u_2$

$$\text{Nous savons que } I_2 = \frac{e-2}{2} \quad \text{alors} \quad I_2 = -1 + \frac{e}{2} = -1 + \frac{1}{2} e$$

$$= -1 + \left(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^0}{0!} \right) e$$

$$\text{Car } u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{(-1)^0}{0!} + \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^2}{2!} = u_2 \quad . \quad \text{Donc}$$

$$I_2 = -1 + e \cdot u_2$$

d) Dédudons que $\forall n \geq 2, I_n = -1 + e \cdot u_n$,

Par récurrence

Initialisation :

Pour $n = 2$: $I_2 = -1 + e \cdot u_2$ Donc la relation est vérifiée pour $n = 2$

Hérédité :

Supposons que $I_n = -1 + eU_n$ et montrons que $I_{n+1} = -1 + eU_{n+1}$

On sait que $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + I_n$ et d'après l'hypothèse $I_n = -1 + eU_n$

$$\text{Donc } I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e + (-1 + eU_n) = -1 + e \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

$$I_{n+1} = -1 + e \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

$$I_{n+1} = -1 + eU_{n+1}$$

Conclusion: $\forall n \geq 2, I_n = -1 + eU_n$.

Remarque :

On peut démontrer cette relation en additionnant termes à termes les relation

$$I_{k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} e + I_k \quad \text{Pour } k \in \{2; 3; \dots; n-1\}$$

4.a) Montrons que : $\forall x \in [1; e], 0 \leq f_n(x) \leq 1$.

Nous avons déjà vu que pour tout n supérieur strictement à 1, f_n est croissante sur $[1; e]$ alors

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(e) \Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq 1$$

Dédudons que $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$:

$$\text{On a } |I_n| = \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx .$$

$$0 \leq f_n(x) \leq 1 \quad \text{par intégration obtient } 0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq [x]_1^e$$

$$0 \leq \int_1^e f_n(x) dx \leq e - 1$$

En multipliant par $\frac{1}{n!}$

$$0 \leq \frac{1}{n!} \int_1^e f_n(x) dx \leq \frac{e-1}{n!}$$

$$\text{Alors } |I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$$

b) Dédudons la limite de (I_n) puis celle de (u_n)

On a $|I_n| \leq \frac{e-1}{n!}$ donc $-\frac{e-1}{n!} \leq I_n \leq \frac{e-1}{n!}$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Calcul de la limite de (u_n)

Comme $I_n = -1 + eU_n$ alors $U_n = \frac{I_n + 1}{e}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{0 + 1}{e} = \frac{1}{e}$.

Exercice 5 Bac 2005

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par: $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$, on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5cm .

1. Dresser le tableau de variation de f_n .

2.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A , dont on déterminera les coordonnées et que ces courbes (C_n) admettent la même tangente en A .

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) .

c) Soit M_n le point de (C_n) en lequel elle admet une tangente horizontale. Montrer que tous les points M_n sont situés sur une branche d'une courbe dont on donnera une équation.

3. Tracer (C_3) .

4. On pose : $f = f_3$ et pour tout $n \geq 2$: $S_n = \sum_{k=2}^n f(k) = \frac{\ln 2}{2^3} + \frac{\ln 3}{3^3} + \dots + \frac{\ln n}{n^3}$.

a) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x) dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}$.

d) Calculer $\int_2^n f(x) dx$, en déduire que la suite (S_n) est convergente.

e) On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lambda$, montrer que $\frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$.

Solution

La fonction numérique f_n est définie sur $]0, +\infty[$ par: $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5cm .

1. Tableau de variation de f_n

Le domaine de définition de f_n est $]0, +\infty[$.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+$

f_n est le rapport de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$, alors f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'_n(x) = \frac{\frac{1}{x} x^n - n x^{n-1} \ln x}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1} - n x^{n-1} \ln x}{x^{2n}}$$

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(1 - n \ln x)}{x^{2n}} \quad f'_n(x) = \frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}$$

Le signe de $f'_n(x) = \frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}}$ est celui de $1 - n \ln x$

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - n \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow x \leq e^{\frac{1}{n}}$$

$$f_n(e^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{e} = \frac{1}{ne}$$

x	0	$\frac{1}{e^n}$	$+\infty$
f'(x)		+	0
f(x)	$-\infty$	$\frac{1}{ne}$	0

2.a) Pour montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A, on a :

$$\forall n \geq 0; \quad A(x, y) \in C_n \Rightarrow f_{n+1}(x) = f_n(x)$$

$$\forall n \geq 0; \quad \frac{\ln x}{x^{n+1}} = \frac{\ln x}{x^n}$$

$$\forall n \geq 0; \quad \frac{\ln x - x \ln x}{x^{n+1}} = 0$$

$$\forall n \geq 0; \quad \frac{(1-x) \ln x}{x^{n+1}} = 0$$

$$\forall n \geq 0; \quad (1-x) \ln x = 0$$

$$1-x=0 \quad \text{ou} \quad \ln x=0$$

$$x=1$$

On a $f_n(1) = 0$. Alors le point $A(1, 0)$ est commun entre toutes les courbes (C_n)

La tangente T en A à la courbe (C_n) a pour équation :

$$y = f'_n(1)(x-1) + f_n(1) \quad \text{soit} \quad y = x-1, \quad \text{car} \quad f'_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad f_n(1) = 0$$

Cette équation est indépendante de n. Alors toutes les courbes (C_n) admettent la même tangente T en A.

b) Pour étudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}) , on étudie le signe de

$$d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

$$\text{On a : } d_n(x) = \frac{(1-x) \ln x}{x^{n+1}}$$

Comme le signe de $\ln x$ est celui de $x - 1$, pour tout $x > 0$, alors $1 - x$ et $\ln x$ sont de signes contraires. D'où $d_n(x) \leq 0 \Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$.

Donc la courbe (C_{n+1}) est située au dessous de (C_n) .

c) Soit M_n le point de la courbe (C_n) en lequel elle admet une tangente horizontale.

Alors $f'_n(x) = 0$. Donc $M_n(e^n, \frac{1}{ne})$. On cherche une relation entre x et y indépendante de n :

$$\begin{cases} x = e^n \\ y = \frac{1}{ne} \end{cases}, n \geq 1$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n} = \ln x \\ \frac{1}{n} = ye \end{cases}$$

$$ye = \ln x$$

$$y = \frac{1}{e} \ln x$$

Alors tous les points M_n sont situés sur une branche de la courbe d'équation

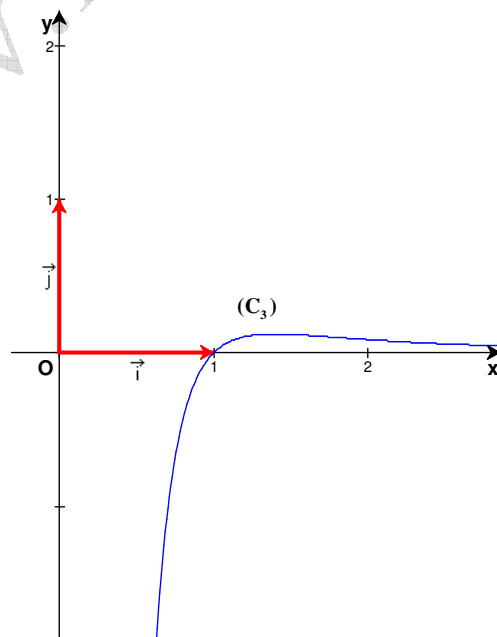
$$y = \frac{1}{e} \ln x$$

Comme $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ pour tout $n \geq 1$, on a $1 < e^{\frac{1}{n}} \leq e$. Alors $1 < x \leq e$, donc les points

M_n sont situés sur une branche de la courbe d'équation $y = \frac{1}{e} \ln x$ dont les abscisses

des points vérifient $1 < x \leq e$

3. Représentation (C_3) .



$$4) S_n = \sum_{k=2}^n f(k) = \frac{\ln 2}{2^3} + \frac{\ln 3}{3^3} + \dots + \frac{\ln n}{n^3}.$$

a) On sait que pour tout $x \geq 2$, la fonction f est décroissante.

Alors pour $k \geq 2$ on a : $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

On applique l'inégalité de la moyenne :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ m \leq f(x) \leq M \end{cases} \Rightarrow (b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M$$

On obtient: $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

b) On écrit l'inégalité précédente pour des valeurs de k ; de $k = 2$ à $k = n-1$:

$$\begin{cases} f(3) \leq \int_2^3 f(x)dx \leq f(2) \\ f(4) \leq \int_3^4 f(x)dx \leq f(3) \\ f(5) \leq \int_4^5 f(x)dx \leq f(4) \\ \vdots \\ f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \leq f(n-1) \end{cases}$$

Par addition membre à membre :

$$\sum_{k=3}^n f(k) \leq \int_2^n f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$$

On peut écrire :

$$-f(2) + \sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_2^n f(x)dx \leq -f(n) + \sum_{k=2}^n f(k)$$

Alors, pour tout $n \geq 2$ on a : $S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3}$.

c) D'après b) on a :

$$\int_2^n f(x)dx \leq S_n - \frac{\ln n}{n^3} \Rightarrow \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n$$

$$S_n - \frac{\ln 2}{8} \leq \int_2^n f(x)dx \Rightarrow S_n \leq \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln 2}{8}$$

On en déduit que pour tout $n \geq 2$ on a : $\int_2^n f(x)dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x)dx + \frac{\ln 2}{8}$.

d) Pour calculer $\int_2^n f(x)dx$, on utilise une intégration par parties :

$$\text{On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{-1}{2} x^{-2} \end{cases}$$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx = \left[\frac{-1}{2} x^{-2} \ln x \right]_2^n + \frac{1}{2} \int_2^n x^{-3} dx$$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{-1}{2} n^{-2} \ln n + \frac{1}{2} 2^{-2} \ln 2 + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{2} x^{-2} \right]_2^n$$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{-1}{2} n^{-2} \ln n + \frac{1}{2} 2^{-2} \ln 2 - \frac{1}{4} n^{-2} + \frac{1}{4} 2^{-2}$$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{-1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} + \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} + \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} \right) \text{ Comme } \frac{-1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} \leq 0 ; \text{ on a donc}$$

$$= \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\frac{-1}{4n^2} - \frac{\ln n}{2n^2} + \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} \leq \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx \leq \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16}.$$

$$S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8} \Rightarrow S_n \leq \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{8}$$

Alors :

$$\Rightarrow S_n \leq \frac{2\ln 2}{8} + \frac{1}{16}$$

Alors la suite (S_n) est majorée.

D'autre part la suite (S_n) est croissante, car

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) - \sum_{k=2}^n f(k) = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^3} > 0.$$

On en conclut que (S_n) est convergente.

$$\text{e) On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_2^n \frac{\ln x}{x^3} dx \right) = \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16}$$

Par passage aux limites à partir de l'inégalité : $\int_2^n f(x) dx + \frac{\ln n}{n^3} \leq S_n \leq \int_2^n f(x) dx + \frac{\ln 2}{8}$

$$\text{On obtient : } \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{\ln 2}{8} + \frac{1}{16} + \frac{\ln 2}{8}$$

On peut écrire :

$$\frac{\ln 2}{8} + \frac{\frac{1}{2} \ln e}{8} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{2\ln 2}{8} + \frac{\frac{1}{2} \ln e}{8}$$

$$\frac{\ln 2 + \ln \sqrt{e}}{8} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{\ln 4 + \ln \sqrt{e}}{8}$$

$$\frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$$

$$\text{Enfin : } \frac{\ln(2\sqrt{e})}{8} < \lambda < \frac{\ln(4\sqrt{e})}{8}.$$

Exercice 6

Bac 2003 SN

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ et soit g_n la fonction définie pour tout entier naturel $n \geq 2$, par : $g_n(x) = \int_x^{nx} f(t)dt$; $x > 1$ et soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variations de f .

2.a) Démontrer que : $\forall t > 1; 0 < \ln t < t - 1$ en déduire que $g_2(x) \geq \ln \frac{2x-1}{x-1}$.

b) Démontrer que : $\forall n \geq 2; g_n(x) \geq g_2(x)$ en déduire que $\lim_{x \rightarrow 1^+} g_n(x) = +\infty$.

3.a) Démontrer que pour tout $x > 1$ on a : $\frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(x) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}$.

b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x}$.

4.a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $g_n'(x) = \frac{n \ln(x) - \ln(nx)}{\ln(x) \ln(nx)}$ et dresser le tableau de variations de la fonction g_n .

b) Construire l'allure de la courbe représentative (C_2) de g_2 , on donnera un encadrement de l'ordonnée du point Ω_2 en lequel la tangente à (C_2) est parallèle à l'axe des abscisses.

Solution

La fonction f est définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

et soit g_n la fonction définie par : $g_n(x) = \int_x^{nx} f(t)dt$; $x > 1$ où n est un entier naturel $n \geq 2$ et soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tableau de variations de f :

On a $\forall x > 1; f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \Rightarrow \forall x > 1; f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Il est clair que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$ d'où le tableau de variations de f :

x	1	$+\infty$
f'		-
f	$+\infty$	0

2.a) Pour démontrer que : $\forall t > 1; 0 < \ln t < t - 1$, il est évident que :
 $\forall t > 1; 0 < \ln t$ (1) et pour le reste on peut étudier la fonction auxiliaire :
 $\varphi(t) = t - 1 - \ln t$ définie pour $t > 1$; on trouve :

$$\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} > 0; \quad \forall t > 1 \text{ d'où le tableau de variation de } \varphi :$$

t	1	$+\infty$
φ'		+
φ	0	$+\infty$

Donc $\forall t > 1; \varphi(t) > 0$ d'où : $\ln t < t - 1$. (2)

De (1) et (2) On obtient: $\forall t > 1; 0 < \ln t < t - 1$.

Pour montrer la relation $g_2(x) \geq \ln \frac{2x-1}{x-1}$ on remarque d'abord que :

$$\frac{2x-1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}, \text{ d'après l'inégalité précédente 2.a) on a}$$

$\forall t > 1; \frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t-1}$ et en intégrant sur un intervalle $[x; 2x]$ tel que $x > 1$ on obtient

$$\forall t > 1; \int_x^{2x} \frac{1}{\ln t} dt > \int_x^{2x} \frac{1}{t-1} dt \text{ d'où } g_2(x) \geq [\ln(t-1)]_x^{2x} \text{ et enfin } g_2(x) \geq \ln \frac{2x-1}{x-1}.$$

b) Pour démontrer que : $\forall n \geq 2; g_n(x) \geq g_2(x)$ on peut écrire

$$g_n(x) = \int_x^{2x} f(t) dt + \int_{2x}^{nx} f(t) dt$$

d'où $g_n(x) = g_2(x) + \int_{2x}^{nx} f(t) dt$ et puisque la fonction f est positive et $\forall n \geq 2; nx \geq 2x$

alors $\int_{2x}^{nx} f(t) dt \geq 0$ d'où $\forall n \geq 2; g_n(x) \geq g_2(x)$.

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 1^+} g_2(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ et $\forall n \geq 2; g_n(x) \geq g_2(x)$ d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g_n(x) = +\infty.$$

3.a) Puisque la fonction f est décroissante sur tout intervalle $[x; nx]$ tel que $x > 1$ et

$n \geq 2$; alors $\forall t \in [x; nx]; \frac{1}{\ln(nx)} \leq f(t) \leq \frac{1}{\ln(x)}$ et par intégration

$$\int_x^{nx} \frac{1}{\ln(nx)} dt \leq \int_x^{nx} f(t) dt \leq \int_x^{nx} \frac{1}{\ln(x)} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(nx)} \int_x^{nx} dt \leq g_n(t) \leq \frac{1}{\ln(x)} \int_x^{nx} dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(nx)} [t]_x^{nx} \leq g_n(t) \leq \frac{1}{\ln(x)} [t]_x^{nx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(nx)} (nx - x) \leq g_n(t) \leq \frac{1}{\ln(x)} (nx - x)$$

$$\text{et enfin on a pour tout } x > 1 : \frac{(n-1)x}{\ln(nx)} \leq g_n(x) \leq \frac{(n-1)x}{\ln(x)}.$$

b) De l'inégalité précédente puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)x}{\ln(nx)} = +\infty$; alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$.

Et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(nx)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{\ln(nx)} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{\ln(x)} = 0$; alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_n(x)}{x} = 0.$$

4.a) $g_n(x) = \int_x^{nx} f(t)dt \Rightarrow g'_n(x) = nf(nx) - f(x)$

$$\Rightarrow g'_n(x) = n \frac{1}{\ln(nx)} - \frac{1}{\ln x}$$

Alors $\forall x > 1; g'_n(x) = \frac{n \ln(x) - \ln(nx)}{\ln(x) \ln(nx)}$

$$g'_n(x) = 0 \Rightarrow n \ln(x) - \ln(nx) = 0, x > 1$$

$$\Rightarrow \ln(x^n) = \ln(nx), x > 1$$

$$\Rightarrow x^n = nx, x > 1$$

$$\Rightarrow x^{n-1} = n$$

$$\Rightarrow x = n^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[n-1]{n}$$

Posons $x_n = n^{\frac{1}{n-1}}$ et $y_n = g_n(n^{\frac{1}{n-1}})$; alors d'après 3.a) :

$$\frac{(n-1)n^{\frac{1}{n-1}}}{\ln(n \cdot n^{\frac{1}{n-1}})} \leq y_n \leq \frac{(n-1)n^{\frac{1}{n-1}}}{\ln(n^{\frac{1}{n-1}})} \text{ d'où } \frac{(n-1)n^{\frac{1}{n-1}}}{n-1} \leq y_n \leq \frac{(n-1)n^{\frac{1}{n-1}}}{1} \text{ et enfin}$$

$$\frac{(n-1)^2 n^{\frac{-n+2}{n-1}}}{\ln(n)} \leq y_n \leq \frac{(n-1)^2 n^{\frac{1}{n-1}}}{\ln(n)}.$$

Tableau de variations de la fonction g_n .

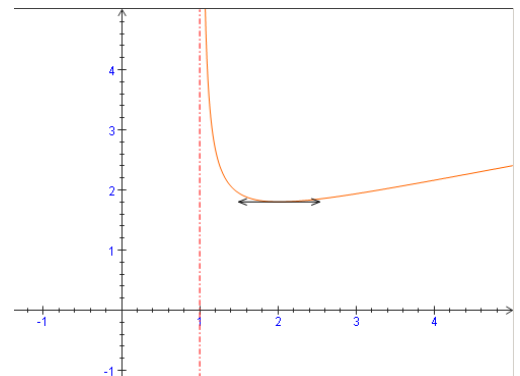
x	1	x_n	$+\infty$
g'_n		- 0 +	
g_n	$+\infty$	y_n	$+\infty$

b) Le point Ω_2 de (C_2) en lequel la tangente à (C_2) est parallèle à l'axe des abscisses

et de coordonnées $x_2 = 2$ et y_2 avec

$$\frac{1}{\ln(2)} \leq y_2 \leq \frac{2}{\ln(2)}.$$

L'allure générale de la courbe (C_2) :



Exercice 7

(Bac 2003 sn)

On définit la suite numérique (U_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx$ et

on pose $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$.

Le but de cet exercice est le calcul des limites suivantes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $W_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

a) Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ (1).

(on pourra utiliser le fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[p; p+1]$).

b) En utilisant la relation (1) démontrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$\ln(n+1) \leq W_n \leq 1 + \ln(n+1)$ (2) en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.

2. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ et on

pose $T_n = \sum_{p=1}^n V_p$.

a) Prouver que $\forall x \in [0;1]$; $\frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ (3).

b) Prouver que : $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$, en déduire que : $\frac{1}{2} V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2} V_n$.

c) Déduire de ce qui précède $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n$.

3.a) En remarquant que : $\forall p > 0$; $\frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$, montrer que :

$$0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}.$$

b) En utilisant (2) montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{\ln(n)}$.

c) Que peut-on en déduire pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution

La suite numérique (U_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x} dx$ et on

pose $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $W_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

a) Pour démontrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$ (1) on

pose $\varphi(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$; la fonction φ est décroissante sur tout intervalle $[p; p+1]$ où $p \in \mathbb{N}^*$;

donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\varphi(p+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(p)$

$$\frac{1}{p+1} \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{p} \quad \text{et en intégrant on obtient}$$

$$\frac{1}{p+1} \int_p^{p+1} dt \leq \int_p^{p+1} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{p} \int_p^{p+1} dt \quad \text{d'où } \forall p \in \mathbb{N}^*;$$

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p} \quad (1).$$

b) On écrit la relation (1) pour $p = 1, 2, \dots, n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leq \ln 2 - \ln 1 \leq 1 \\ \frac{1}{3} \leq \ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \leq \ln 4 - \ln 3 \leq \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

En sommant on obtient $\sum_{p=2}^{n+1} \frac{1}{p} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$ et on peut écrire :

$$-1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

$$\text{donc : } -1 + W_n + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq W_n$$

$$\text{d'une part : } \ln(n+1) \leq W_n$$

$$\text{d'autre part : } -1 + W_n + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \text{ implique}$$

$$W_n + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \ln(n+1);$$

$$\text{mais } W_n \leq W_n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow W_n \leq 1 + \ln(n+1)$$

Enfin on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\ln(n+1) \leq W_n \leq 1 + \ln(n+1)$ (2)

D'après (2) et puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty$.

2. La suite (V_n) est définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$ et on pose

$$T_n = \sum_{p=1}^n V_p.$$

a) Pour prouver que $\forall x \in [0;1]$; $\frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ (3) on a

$$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^0 \leq e^x \leq e^1$$

D'une part $1 \leq e^x \Rightarrow 2 \leq 1+e^x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{1+e^x}$$

D'autre part $1 \leq e^x \Rightarrow 1+e^x \leq 2e^x$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^x} \geq \frac{1}{2e^x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^x} \geq \frac{e^{-x}}{2}$$

Donc $\forall x \in [0;1]$; $\frac{e^{-x}}{2} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ (3)

b) Nous avons $\int_0^1 e^{-nx} dx = \frac{-1}{n} [e^{-nx}]_0^1 = \frac{-e^{-n} + e^0}{n} = \frac{1 - e^{-n}}{n}$

donc : $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$.

En multipliant dans (3) par e^{-nx} On obtient $\frac{e^{-(n+1)x}}{2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+e^x} \leq \frac{e^{-nx}}{2}$ et par intégration on déduit que :

$$\frac{1}{2} V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2} V_n.$$

c) D'après b) on a $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-n}}{n} = 0 \text{ on en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

D'autre part on a $\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} nV_{n+1} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n \leq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n$ et puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-n}) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} nV_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} (1 - e^{-n}) = 1 ; \text{ alors}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nU_n = 1.$$

3.a) En remarquant que : $p > 0 \Rightarrow p \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{p} \leq 1 \Rightarrow \frac{e^{-p}}{p} \leq e^{-p}$ on peut écrire

$\forall p > 0$; $\sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \sum_{p=1}^n e^{-p}$, le deuxième membre est la somme des termes consécutifs

d'une suite géométrique de premier terme e^{-1} et de raison e^{-1} donc :

$$\forall p > 0; \sum_{p=1}^n e^{-p} = e^{-1} \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} = \frac{1 - e^{-n}}{e - 1} = \frac{1}{e - 1} - \frac{e^{-n}}{e - 1} \leq \frac{1}{e - 1} \text{ d'où } 0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e - 1}.$$

b) Rappelons que $V_n = \frac{1-e^{-n}}{n} = \frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}$ et $T_n = \sum_{p=1}^n V_p$ donc $T_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p}$

d'où

$T_n = W_n - \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p}$; de la relation $0 \leq \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq \frac{1}{e-1}$ et du fait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = +\infty$

on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.

Pour calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{\ln(n)}$ on a $\frac{T_n}{\ln n} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p \ln n} - \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p \ln n}$

peut encadrer T_n :

D'après 3.a) on a $\frac{-1}{e-1} \leq -\sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq 0$ donc $W_n - \frac{1}{e-1} \leq W_n - \sum_{p=1}^n \frac{e^{-p}}{p} \leq W_n$ d'où

$$W_n - \frac{1}{e-1} \leq T_n \leq W_n \Rightarrow \frac{W_n}{\ln n} - \frac{1}{(e-1)\ln n} \leq \frac{T_n}{\ln n} \leq \frac{W_n}{\ln n}$$

En utilisant (2) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

$$\ln(n+1) \leq W_n \leq 1 + \ln(n+1) \Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{W_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\ln n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\ln n} = 1 \text{ et puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(e-1)\ln n} = 0 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n}{\ln n} = 1.$$

c) On a $S_n = \sum_{p=1}^n U_p$ et : $\frac{1}{2} V_{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{2} V_n$ donc :

$$\frac{1}{2} \sum_{p=2}^{n+1} V_p \leq \sum_{p=1}^n U_p \leq \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n V_p$$

$$\frac{1}{2} [T_{n+1} - V_1] \leq S_n \leq \frac{1}{2} T_n$$

$$\frac{1}{2} T_{n+1} \leq S_n \leq \frac{1}{2} T_n$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Exercice 8 (Bac 2017 sn)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit

(C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.
- 2) a- Dresser le tableau de variation de f_0 .
b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ?
- 3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
b- Dédurre le tableau de variation de f_1
c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère.
- 4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.
b- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$.

Interpréter.

- c- Calculer f'_n et dresser le tableau de variation de f_n .
- 5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$
a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$
b- Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ et que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2 .
c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Montrons que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe

Si un point M d'abscisse x est commun à toutes les courbes alors $f_{n+1}(x) = f_n(x)$

$$\text{Donc } \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \text{ et par conséquent } x = 0$$

Or $f_n(0) = \frac{1}{2}$ Donc toutes les courbes (C_n) passent par le point de coordonnées

$$\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

2) Tableau de variation de f_0 .

$$\text{On a } f_0(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 1$ et $f_0'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$

Donc le tableau de variation de f_0 est le suivant

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	-+	
$f_0(x)$	0	1

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminons les coordonnées de A, milieu de $[MN]$,

Comme $M(x; f_0(x))$ et $N(-x; f_0(-x))$ alors si $A(x_A; y_A)$ est le milieu de $[MN]$ alors

$$\begin{cases} x_A = \frac{x + (-x)}{2} = 0 \\ y_A = \frac{f_0(x) + f_0(-x)}{2} = \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^x}}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alors les coordonnées de A sont $A(0; \frac{1}{2})$

Comme $y_A = \frac{f_0(x) + f_0(-x)}{2} = \frac{1}{2}$ alors $f_0(x) + f_0(-x) = 2 \times \frac{1}{2}$ donc A représente le centre de symétrie de (C_0)

3) a- Montrons que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

On remarque que $f_1(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x} = f_0(-x)$

D'où si le point $M_1(x; y)$ appartient à (C_1) alors le point $M_0(-x; y)$ appartient à (C_0)

Donc les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

b- Le tableau de variation de f_1

Nous savons que $f_1(x) = f_0(-x)$. Donc $f_1'(x) = -f_0'(-x) < 0$

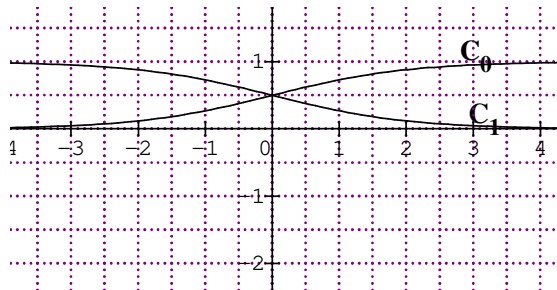
Donc f_1 est décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_1'(x)$	-	
$f_1(x)$	1	0

c- Construction de (C_0) et (C_1) dans le même repère

Chacune des courbes (C_0) et (C_1) admet deux asymptotes horizontales

d'équations $y=0$ et $y=1$. Elles coupent (Oy) au point d'ordonnée $\frac{1}{2}$



4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a- Calcul de limites et interprétation

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-x}) = 1 \end{cases}$$

Interprétation : la courbe (C_n) admet un asymptote horizontale d'équation $y=1$ à $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \times \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-(n-1)x}}{-(n-1)x} \times \frac{-(n-1)x}{x(1+e^x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-(n-1)x}}{-(n-1)x} \times \frac{-(n-1)}{(1+e^x)} \right)$$

$$\text{On pose } t = -(n-1)x \text{ alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t} \times \frac{-(n-1)}{(1+e^x)} \right)$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^t}{t} \right) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-(n-1)}{1+e^x} \right) = -n+1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$$

Interprétation graphique:

La courbe (C_n) admet une branche parabolique de direction (Oy) à $-\infty$

b- Calcul de f'_n et

$$f'_n(x) = \frac{-ne^{-nx}(1+e^{-x}) + e^{-x} \times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{-ne^{-nx}(1+e^{-x}) + e^{-x} \times e^{-nx}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{-ne^{-nx}(-n + (1-n)e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} < 0$$

Le tableau de variation de f_n

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	
$f_n(x)$	$+\infty$	\rightarrow 0

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$

a- Justification de l'existence de (u_n)

Comme f_n est continue sur $[0,1]$ alors (u_n) existe.

Calcul de u_0

$$u_0 = \int_0^1 f_0(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln(1+e^x) \right]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

b- Vérifions que $u_0 + u_1 = 1$

$$u_1 + u_0 = \int_0^1 f_0(x) dx + \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 dx = [x]_0^1 = 1$$

Vérifions que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$$

Déduction de u_1 et u_2

$$u_0 + u_1 = 1 \Rightarrow u_1 = 1 - u_0 \Rightarrow u_1 = 1 - \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

$$u_2 + u_1 = \frac{1-e^{-1}}{1} \Rightarrow u_2 = 1 - e^{-1} - u_1$$

$$\Rightarrow u_2 = 1 - e^{-1} - 1 + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) = -e^{-1} + \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$$

c- Montrons que (u_n) est convergente et calculons sa limite

$$\text{On sait que } -(n+1)x \leq -nx \Rightarrow e^{-(n+1)x} \leq e^{-nx} \Rightarrow \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leq \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$$

$$\text{Alors } \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \text{ et } u_{n+1} \leq u_n$$

Comme (u_n) est une suite décroissante et minorée par zéro elle converge.

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{n} e^{-n} + \frac{1}{n}$$

$$\text{Donc } 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.