Exercices de révision (2) 7C

(Analyse)

Exercice1 (Bac 2017) Voir corrigé

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1) a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Déduire que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $\left[1,\sqrt{e}\right]$ une seule solution notée a_n

c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge.

2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1}\frac{\ln x}{x^2}dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$

b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx$, $n \geq 2$.

3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n=\frac{\ln 2}{2^2}+\frac{\ln 3}{3^2}+\frac{\ln 4}{4^2}+....+\frac{\ln n}{n^2}$

a- Montrer que $S_n-\frac{\ln(2)}{(2)^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2}dx \leq S_n-\frac{\ln(n)}{(n)^2}$

b- En déduire que : $\frac{1+\ln 2}{2}-\frac{n+(n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2+3\ln 2}{4}-\frac{1+\ln(n)}{n}$

4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n=\frac{1}{n!}\int_1^2\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n

b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $I_n-\frac{1}{2}\frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$

c- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln 2}{1!}+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+....\frac{(\ln 2)^n}{n!}\right]$

d- Exprimer (u_n) en fonction de I_n. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 2 (Bac 2015) Voir corrigé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1.a) Justifier que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera. Donner l'expression de sa réciproque $f^{-1}(x)$. On note (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

2.a) Vérifier que le point $\Omega(0,\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe (C) .

b) Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un seul point d'abscisse α telle que $0,4<\alpha<0,5$.

c) Tracer les courbes (C) et (C').

d) Calculer, en fonction de α , l'aire A du domaine plan limité par les courbes (C) et (C'), et les axes des coordonnées (On pourra remarquer que $\frac{1}{e^x+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$).

3) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\alpha} f^n(t)dt$ où α est le réel trouvé en 2.b)

a) Justifier que $I_1=\alpha+\ln(2\alpha)$.

b) Vérifier que pour tout réel x : $f'(x)=f^2(x)-f(x)$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left(\alpha^n - \frac{1}{2^n}\right)$.

d) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et positive. Que peut on en déduire ?

4.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\alpha^{n+1} \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} I_n$.

b) Montrer que $I_n = \alpha + \ln(2\alpha) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left(\alpha^k - \frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 3 (Bac 2015) Voir corrigé

1) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{3x^3 - 12x^2 + 19x - 10}{x^3 - 4x^2 + 5x}$

a) Déterminer a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x) = \frac{(x-1)(ax^2 + bx + c)}{x(x^2 - 4x + 5)}$.

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x - 3 + \ln\left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2}\right)$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D, est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D.

3.a) Vérifier que $f'(x) = g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f.

b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1}.   c) Construire (C).

4) On se propose dans cette question de calculer l'aire S du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $y = 3x - 3$, $x = 3$ et $x = 2 + \sqrt{3}$.

a) Vérifier que pour tout réel x on a : $\frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 5} = 2\left(1 + \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 5} - \frac{1}{1 + (x-2)^2}\right)$.

b) Calculer $A = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{2x-4}{x^2 - 4x + 5} dx$.

c) En posant $x = 2 + \tan t$ pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$; calculer $B = \int_3^{2+\sqrt{3}} \frac{1}{1 + (x-2)^2} dx$.

d) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_2^{2+\sqrt{3}} \ln(x^2 - 4x + 5) dx$ et $K = 2\int_2^{2+\sqrt{3}} \ln x dx$. En Déduire le calcul de l'aire S exprimée en unité d'aire.

Exercice 4 (Bac 2017) Voir corrigé

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on définit la fonction f_n sur $]0;+\infty[$ par : $f_n(x) = (\ln x)^n$ et on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et discuter $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$ suivant la parité de n.

b) Calculer $f_n'(x)$ dérivée de $f_n(x)$ et dresser le tableau de variations de f_n (suivant la parité de n)

2.a) Etudier les positions relatives de et (C_2) et (C_3)

b) Construire (C_2) et (C_3) dans le même repère.

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on pose : $I_n = \frac{(-1)^n}{n!}\int_1^e f_n(x)dx$ et $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

3.a) Montrer que $I_2 = \frac{e-2}{2}$ (on procédera par intégration par parties).

b) Montrer que pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, on a : $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e + I_n$

c) Vérifier que $I_2=-1+e.u_2$ d) En déduire que $\forall n\geq 2,\quad I_n=-1+e.u_n$

4.a) Montrer que : $\forall x\in[1;e],\ 0\leq f_n(x)\leq 1$. Déduire que $|I_n|\leq \dfrac{e-1}{n!}$

b) Déduire la limite de (I_n) puis celle de (u_n)

Exercice 5 (Bac 2005) Voir corrigé

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit f_n la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par: $f_n(x)=\dfrac{\ln x}{x^n}$, on désigne par (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $5cm$.

1. Dresser le tableau de variation de f_n.

2.a) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe A, dont on déterminera les coordonnées et que ces courbes (C_n) admettent la même tangente en A.

b) Etudier la position relative de (C_n) et (C_{n+1}).

c) Soit M_n le point de (C_n) en lequel elle admet une tangente horizontale. Montrer que tous les points M_n sont situés sur une branche d'une courbe dont on donnera une équation.

3. Tracer (C_3).

4. On pose : $f=f_3$ et pour tout $n\geq 2$: $S_n=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}f(k)=\frac{\ln 2}{2^3}+\frac{\ln 3}{3^3}+\ldots+\frac{\ln n}{n^3}$.

a) Montrer que pour tout $k\geq 2$ on a : $f(k+1)\leq\displaystyle\int_k^{k+1}f(x)dx\leq f(k)$.

b) Montrer que pour tout $n\geq 2$ on a : $S_n-\dfrac{\ln 2}{8}\leq\displaystyle\int_2^n f(x)dx\leq S_n-\frac{\ln n}{n^3}$.

c) En déduire que pour tout $n\geq 2$ on a : $\displaystyle\int_2^n f(x)dx+\frac{\ln n}{n^3}\leq S_n\leq\int_2^n f(x)dx+\frac{\ln 2}{8}$.

d) Calculer $\displaystyle\int_2^n f(x)dx$, en déduire que la suite (S_n) est convergente.

e) On pose $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\lambda$, montrer que $\dfrac{\ln(2\sqrt{e})}{8}<\lambda<\dfrac{\ln(4\sqrt{e})}{8}$.

Exercice 6 (Bac 2003) Voir corrigé

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ et soit g_n la fonction définie pour tout entier naturel $n\geq 2$, par : $g_n(x)=\displaystyle\int_x^{nx}f(t)dt;\quad x>1$ et soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variations de f.

2.a) Démontrer que : $\forall t>1;\ 0<\ln t<t-1$ en déduire que $g_2(x)\geq\ln\dfrac{2x-1}{x-1}$.

b) Démontrer que : $\forall n\geq 2;\ g_n(x)\geq g_2(x)$ en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}g_n(x)=+\infty$.

3.a) Démontrer que pour tout $x>1$ on a: $\dfrac{(n-1)x}{\ln(nx)}\leq g_n(x)\leq\dfrac{(n-1)x}{\ln(x)}$.

b) Calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g_n(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{g_n(x)}{x}$.

4.a) Montrer que pour tout $x>1$ on a : $g_n'(x)=\dfrac{n\ln(x)-\ln(nx)}{\ln(x)\ln(nx)}$ et dresser le tableau de variations de la fonction g_n.

b) Construire l'allure de la courbe représentative (C_2) de g_2, on donnera un encadrement de l'ordonnée du point Ω_2 en lequel la tangente à (C_2) est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice 7 (Bac 2003) Voir corrigé

On définit la suite numérique (U_n) pour tout $n \in IN^*$ par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^x}dx$ et on pose $S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p$.

Le but de cet exercice est le calcul des limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

1. Pour tout $n \in IN^*$ on pose $W_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

a) Démontrer que : $\forall p \in IN^*;\quad \frac{1}{p+1} \le \ln(p+1) - \ln(p) \le \frac{1}{p}\qquad (1)$.

(on pourra utiliser le fait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[p;p+1]$).

b) En utilisant la relation (1) démontrer que: $\forall n \in IN^*;\quad \ln(n+1) \le W_n \le 1+\ln(n+1)\quad (2)$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$.

2. Soit (V_n) la suite définie pour tout entier $n \in IN^*$ par : $V_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ et on pose $T_n = \sum_{p=1}^{n} V_p$.

a) Prouver que $\forall x \in [0;1]\ ;\quad \frac{e^{-x}}{2} \le \frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{2}\qquad (3)$.

b) Prouver que : $V_n = \int_0^1 e^{-nx}dx$, en déduire que : $\frac{1}{2}V_{n+1} \le U_n \le \frac{1}{2}V_n$.

c) Déduire de ce qui précède $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.

3.a) En remarquer que : $\forall p > 0;\quad \frac{e^{-p}}{p} \le e^{-p}$, montrer que : $0 \le \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{-p}}{p} \le \frac{1}{e-1}$.

b) En utilisant (2) montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{T_n}{\ln(n)}$.

c) Que peut –on en déduire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 8 (Bac 2017) Voir corrigé

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer.

2) a- Dresser le tableau de variation de f_0.

b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ?

3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

b- Déduire le tableau de variation de f_1

c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère.

4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.

a- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter.

b- Calculer f'_n et dresser le tableau de variation de f_n.

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx,\ n \in \mathbb{N}$

a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$

b- Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ et que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2.

c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.