

Exercice 1: (3 points)

- | | |
|---|--------|
| A. 1. Déterminer le reste de la division euclidienne du nombre 2021 par 11. | 0.25pt |
| 2. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 2021^n par 11. | 0.5pt |
| 3. Justifier que le nombre $2021^{2020} - 2021^{1960}$ est divisible par 11. | 0.25pt |
| B. Soit N un entier naturel s'écrivant \overline{xyxy} dans le système décimal. | |
| 1. Montrer que N est un multiple de 101. | 0.25pt |
| 2. Déterminer y pour que N soit un multiple de 5. | 0.25pt |
| 3. Déterminer x et y pour que N soit un multiple de 20 et préciser N dans ces cas. | 0.5pt |
| C. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$, où x et y sont deux entiers strictement compris entre 0 et 10. | |
| 1. Montrer que M est inversible et déterminer sa matrice inverse M^{-1} , en fonction de x et y . | 0.5pt |
| 2. Déterminer les valeurs possibles de x et y telles que le déterminant de M soit égal à 1. | 0.5pt |

Exercice 2: (4 points)

- ABCD un rectangle de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soient E le symétrique de B par rapport à (AC) , F celui de O par rapport à A , I le milieu de $[OA]$ et J celui de $[OD]$.
- | | |
|---|--------|
| 1. Faire une figure soignée. | 0.5pt |
| 2. Justifier que le triangle BEF est équilatéral direct. | 0.25pt |
| 3. Montrer que les points O , E , F et B appartiennent à un même cercle. Préciser son centre. | 0.25pt |
| 4. a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f transformant F en O et A en D . | 0.5pt |
| b) Justifier que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. | 0.5pt |
| 5. a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe S transformant E en O et B en C . | 0.25pt |
| b) Déterminer le rapport de S et une mesure de son angle. | 0.5pt |
| c) Montrer que le centre de S appartient aux cercles de diamètres respectifs $[OE]$ et $[BC]$. Préciser le centre de S . | 0.5pt |
| d) Déterminer l'image de C par S et construire le point $K = S(D)$. | 0.5pt |
| e) Soit (M_n) la suite des points du plan tels que $M_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = S(M_n)$. | 0.25pt |
- Vérifier que $M_{2021} \in [JC]$

Exercice 3: (5 points)

- Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -2 - i$ et $z_B = -1 - 3i$.
- | | |
|--|--------|
| 1. a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $-4z^2 - (12 + 16i)z + 7 - 24i = (2iz - 4 + 3i)^2$ | 0.5pt |
| b) En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E): $z^2 - (2m + 2 + i)z + 2m^2 + (5 + 5i)m - 1 + 7i = 0$, où m est un paramètre complexe. | 0.5pt |
| 2. Soit S_1 la similitude directe qui, à tout point M d'affixe m , associe le point M_1 d'affixe $z_1 = (1 + i)m - 1 + 2i$ et soit S_2 la similitude directe qui, à tout point M d'affixe m associe le point M_2 d'affixe $z_2 = (1 - i)m + 3 - i$. | |
| a) Donner les éléments caractéristiques de S_1 et S_2 . | 1pt |
| b) Montrer que $S_1 \circ S_2$ est une homothétie dont on donnera le rapport et le centre C . | 0.5pt |
| c) Soit R la transformation qui au point M_1 associe le point M_2 , pour tout point M du plan. Justifier que R est une rotation dont on donnera une mesure de l'angle et l'affixe du centre D . | 0.5pt |
| d) Placer les points A , B , C et D et déterminer la nature du triangle ABD . | 0.75pt |

3. Soit E l'ellipse de foyers A et B et dont D est un sommet.

a) Déterminer le centre I de E et justifier que la longueur du grand axe de E est $\sqrt{10}$.

b) Donner l'équation de E.

c) Construire E après avoir placé ses sommets.

0.5pt

0.25pt

0.5pt

Exercice 4 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1; +\infty[$ par $f(x) = 1 + (x+1)\ln(x+1) - (\ln(x+1))^2$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer et interpréter les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

0.75pt

2. Pour tout réel $x > -1$, on note $u(x) = x + 1 - \ln(x+1)$ et $v(x) = x \ln(x+1)$

a) Montrer que la fonction v est positive sur chacun des intervalles $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

0.5pt

b) Etudier les variations de la fonction u puis en déduire qu'elle est positive sur $]-1; +\infty[$

0.5pt

c) Montrer que $\forall x > -1$; $f'(x) = \frac{u(x) + v(x)}{x+1}$ où f' est la dérivée de f.

0.25pt

d) Dresser le tableau de variation de f.

0.25pt

3. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.

0.25pt

4. Soit $g(x) = f(x) - x$.

a) Etudier les variations de g et justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet sur I une unique solution α

0.5pt

b) Vérifier que $-0.7 < \alpha < -0.6$. En déduire la position relative de (C) et la droite Δ d'équation $y = x$

0.5pt

5. Construire la droite Δ et les courbes (C) et (C') . ((C') étant la courbe de la réciproque f^{-1} de f)

0.5pt

Exercice 5 : (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$; $f(x) = \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^2}$ et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1. a) Justifier que $\forall x > 0$; $\frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^n} = e^{1-\frac{1}{x} + n \ln(\frac{1}{x})}$ puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^n} \right) = 0$

0.5pt

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite de 0.

0.5pt

2. a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{(1-2x)e^{1-\frac{1}{x}}}{x^4}$ et préciser son signe.

0.5pt

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe Γ .

0.5pt

3. Calculer l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

0.25pt

4. On définit la suite (I_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 \frac{f(x)}{x^n} dx$

a) Justifier que $I_0 = A$

0.25pt

b) Montrer que la suite (I_n) est strictement décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?

0.5pt

c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_{n+1} - (n+1)I_n = \frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} - 1$.

0.5pt

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2^{n+1}} \right)$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

0.5pt

Fin.