

Baccalauréat
2015
Session Normale

Série : Sciences de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficient: 6

Exercice 1 (3 points)

Une usine fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par **a** et **b**. On a constaté que **6%** des montres fabriquées présentent le défaut **a** (et peut-être aussi le défaut **b**), **5%** le défaut **b** (et peut-être aussi le défaut **a**) et **2%** présentaient simultanément les défauts **a** et **b**.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A** : «la montre tirée présente le défaut **a**» ;
- B** : «la montre tirée présente le défaut **b**» ;
- C** : «la montre tirée ne présente aucun des deux défauts» ;
- D** : «la montre tirée présente un et un seul des deux défauts».

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est :	0.6	0.06	6	(0,5pt)
2	La probabilité $p(C)$ est :	0.91	0.89	0.87	(0,5pt)
3	La probabilité $p(D)$ est :	0.05	0.07	0.98	(0,5pt)
4	La probabilité $p_B(A)$ est :	0.4	0.04	0.3	(0,5pt)
5	La probabilité $p_{\bar{A}}(B)$ est :	$\frac{3}{96}$	$\frac{91}{94}$	$\frac{3}{94}$	(0,5pt)
6	La probabilité $p_D(A)$ est :	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{6}{7}$	(0,5pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 10z^2 + 33z - 34$.

- a) Calculer $P(2)$. (0,5 pt)
- b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$. (0,5 pt)
- c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$. On note z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de **(E)** telles que $\text{Im}(z_2) < \text{Im}(z_0) < \text{Im}(z_1)$. (0,5 pt)

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points **A**, **B** et **C** d'affixes respectives : $z_A = z_1 + 3i$, $z_B = z_2 + i$ et $z_C = 6 + 2i$.

- a) Vérifier que $z_A = 4 + 4i$ et $z_B = 4$. (0,5 pt)
- b) Ecrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique. (0,5 pt)
- c) Placer les points **A**, **B** et **C** dans le repère. (0,5 pt)

3) Pour tout nombre $z \neq 4 + 4i$ on pose : $f(z) = \frac{z-4}{z-4-4i}$.

- a) Vérifier que $f(z_C) = i$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)
- b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points **M** du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$. (0,5 pt)
- c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points **M** d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. (0,5 pt)

4) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = (z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n .

- a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses. (0,25 pt)
- b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n > 2015$. (0,25 pt)

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 3x - 3 - 2x \ln x, & x > 0 \\ f(0) = -3 \end{cases}$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm .

1.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. En déduire que f est continue à droite de $x_0 = 0$. (0,5 pt)

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. (0,5 pt)

2.a) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$ et vérifier que $f'(\sqrt{e}) = 0$. (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f . (0,5 pt)

3.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point A d'abscisse $x_0 = 1$. (0,5 pt)

b) Montrer que (C) coupe l'axe des abscisses (Ox) en un point B autre que A dont l'abscisse α est telle que : $2.3 \leq \alpha \leq 2.4$. (0,5 pt)

c) Déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$. (0,5 pt)

4) On considère la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x^2 \ln x; & x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = 3x - 3 + g'(x)$. (0,5 pt)

b) En déduire une primitive F de f sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt)

5) Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on pose : $U_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$

a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. (0,5 pt)

b) Exprimer U_n en fonction de n . (0,25 pt)

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25 pt)

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x-2)(1+e^x)$.

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement. (0,5 pt)

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-2))$ et en donner une interprétation graphique. (0,5 pt)

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$ puis la dérivée seconde $f''(x)$. (0,5 pt)

b) En déduire que la courbe (C) possède un point d'inflexion A dont on précisera les coordonnées. (0,25 pt)

c) Dresser le tableau de variation de la dérivée f' . En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x . (0,5 pt)

3.a) A l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variation de f . (0,5 pt)

b) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on déterminera. On désigne par (C') la courbe représentative de la réciproque f^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (0,5 pt)

4.a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) avec les axes de coordonnées. (0,5 pt)

b) Déterminer le point B de (C) où la tangente T à la courbe (C) est parallèle à l'asymptote (D). Donner une équation de T. (0,5 pt)

c) Tracer (C), T, (D) et (C'). (0,5 pt)

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-2 = (2+m)e^{-x}$. (0,5 pt)

5.a) Calculer l'intégrale $I = \int_0^2 (x-2-2e^x) dx$. (0,25 pt)

b) En utilisant une intégration par parties, calculer $J = \int_0^2 xe^x dx$. (0,25 pt)

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$. (0,25 pt)

Fin.