BACCALAUREAT 2020
Session Normale
Epreuve : MATHEMATIQUES

Série : Sciences de la Nature
Coefficient : 6
Durée : 4h

Exercice 1 : (3 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel non nul n par : $u_n = \frac{n}{2n^2+n}$ et $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$ on donne $x_n = \frac{1}{u_n}$ et $y_n = \ln(v_n)$.

Pour chacune des six questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La valeur de x_5 est	6	11	16	(0.5 pt)
2	La limite de la suite (u_n) est	0	$\frac{1}{2}$	1	(0.5 pt)
3	La suite (v_n) est une suite	Croissante	Décroissante	Non monotone	(0.5 pt)
4	La suite (x_n) est une suite	Arithmétique	Géométrique	Convergente	(0.5 pt)
5	Le terme général de la suite (y_n) est	$y_n = \frac{1}{3}\ln n$	$y_n = -n\ln 3$	$y_n = n\ln 3$	(0.5 pt)
6	La somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ est égale à	$\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)$	$\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$	(0.5 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée

Question n°	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Réponse						

Exercice 2 : (6 points)

1° Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (7+7i)z^2 + (-2+30i)z + 32 - 16i$

a) Calculer $P(2i)$ — 0.5pt

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout z, on a : — 0.5pt
$P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$ — 0.5pt

2° Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3+i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4+4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ — 1pt

b) Déterminer la nature du triangle ABC — 0.5pt

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que ABDC soit un parallélogramme. Placer D. — 0.5pt

3° Pour tout nombre complexe $z \neq 3+i$; on pose : $f(z) = \frac{z-2i}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_D) = -i$ et interpréter graphiquement. — 0.5pt

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$ — 0.5pt

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$ — 0.5pt

4° On pose $z_0 = f(6)$ et pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. — 0.5pt

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $|z_n| \geq 2020$. **0.25pt**

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2020} appartient à l'axe des abscisses. **0.25pt**

Exercice 3 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 2 + e^{-x}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° a) Justifier que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x-2)) = 0$ **0.5 pt**

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) puis étudier leur position relative. **0.75 pt**

2° a) Montre que $f(x) = \dfrac{xe^x - 2e^x + 1}{e^x}$ et que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{xe^x}$ **0.5 pt**

b) En déduire que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement **0.75 pt**

3° Justifier que $f'(x) = 1 - e^{-x}$ et dresser le tableau de variation de f. **0.5 pt**

4° a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions α et β avec $\beta < \alpha$ puis vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$. **0.5 pt**

b) Justifier que $f'(\alpha) = \alpha - 1$ **0.25 pt**

5° Construire la courbe (C) et son asymptote (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **0.25 pt**

Exercice 4 : (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x\ln x & \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et soit (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°a) Calculer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue en 0^+. **0.75pt**

b) Calculer $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ et interpréter graphiquement. **0.5pt**

c) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement. **1 pt**

2° Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f. **1 pt**

3° a) Déterminer les points d'intersection de la courbe (Γ) avec l'axe des abscisses. **1pt**

b) Donner une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse e. **0.5pt**

4° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$.

a) Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. **0.5pt**

b) Montrer que $(g^{-1})'(0) = -1$ où g^{-1} est la réciproque de g. **0.5pt**

c) Construire (T), (Γ) et (Γ') dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, (Γ') étant la courbe représentative de g^{-1}. **0.5pt**

d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $2x - x\ln x = m$ **0.25pt**

5° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale $A = \int_1^e x\ln x\,dx$. **0.25pt**

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. **0.25pt**

Fin