

Exercice 1 (3 points)

On dispose, à l'intérieur d'un carton, de 120 fleurs de deux types : parfumées et non parfumées. Certaines de ces fleurs sont blanches et les autres sont rouges. On sait que :

- 25% de fleurs sont parfumées
- 40% de fleurs parfumées sont rouges.
- 55% de fleurs sont de couleur blanche.

On choisit, au hasard, une fleur et on suppose que toutes les fleurs ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements suivants :

- S : « La fleur choisie est parfumée » ;
R : « La fleur choisie est de couleur rouge » ;
B : « La fleur choisie est de couleur blanche ».

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des réponses proposées est correcte.

N°	Questions	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $P(S)$ est	0,25	0,025	0,4	0,5pt
2	La probabilité $P_S(R)$ est	0,1	0,25	0,4	0,5pt
3	La probabilité $P(B)$ est	0,4	0,55	0,6	0,5pt
4	La probabilité $P(B \cap S)$ est	0,15	0,55	0,6	0,5pt
5	La probabilité $P(B \cap \bar{S})$ est	0,25	0,4	0,55	0,5pt
6	La probabilité $P(S \cap R)$ est	0,1	0,4	0,6	0,5pt

Recopier sur la feuille de réponse et compléter le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (5 points)

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (2 + 4i)z^2 - (2 - 8i)z + 4 - 12i$

a) Calculer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$. 0,5pt

b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0$. 1 pt

c) Déterminer le nombre complexe z_0 tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - z_0)(z^2 - (3 + i)z + 4)$. 0,5pt

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Placer les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = -1 + 3i$ 0,75pt

3. Pour tout nombre complexe $z \neq 1 - i$, on pose : $f(z) = \frac{z + 1 - 3i}{z - 1 + i}$.

a) Vérifier que $f(z_B) = -i$ et en déduire la nature du triangle ABC. 0,75pt

b) Déterminer et construire l'ensemble de points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur 0,75pt

4. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $z_n = (z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n

a) Déterminer les entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses 0,5pt

b) Montrer que le point M_{2025} appartient à la droite (OA). 0,25pt

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (e^x - x - 2)e^{-x}$.

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- | | |
|--|--------|
| 1.a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{x+2}{e^x}$. | 0,5pt |
| b) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, puis interpréter graphiquement | 0,75pt |
| c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe Γ possède une asymptote horizontale D. | 0,5pt |
| 2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^{-x}$. Dresser le tableau de variation de f . | 1 pt |
| 3. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [-1, +\infty[$. | |
| a) Montrer que h est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera. | 0,5pt |
| b) Dresser le tableau de variation de h^{-1} . | 0,5pt |
| 4.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur $\mathbb{R}$, deux solutions α et β avec $\alpha > \beta$. Justifier que $1,1 < \alpha < 1,2$ | 0,5pt |
| b) Construire D, Γ et Γ' , (Γ' étant la courbe représentative de h^{-1}). | 0,75pt |
| 5.a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale $\int_0^1 xe^{-x} dx$. | 0,5pt |
| b) Calculer l'aire A du domaine délimité par la courbe Γ , l'asymptote horizontale D et les deux droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$. | 0,5pt |

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\ln x}{2x}$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- | | |
|---|--------|
| 1. On considère la fonction g définie sur I par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$ | |
| a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in I$ et étudier les variations de g . | 1pt |
| b) Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de g sur I . | 0,75pt |
| 2.a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. | 0,5pt |
| b) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une est la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{2}$. Etudier la position relative de (C) et Δ . | 0,75pt |
| 3.a) Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$ (g étant la fonction définie à la question 1.). | 0,5pt |
| b) En déduire le signe de f' puis dresser le tableau de variation de la fonction f . | 0,5pt |
| 4.a) Montrer que (C) admet une tangente T parallèle à Δ et en donner une équation. | 0,5pt |
| b) Construire la courbe (C), l'asymptote Δ et la tangente T dans le même repère. | 0,75pt |
| c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $\ln x + 2mx = 0$. | 0,25pt |
| 5. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$. | 0,5pt |
| Montrer que la suite (u_n) est croissante et calculer sa limite. | |

Fin.