

Exercice 1 (3 points)

1° On considère l'équation (E) : $25x - 49y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

- | | |
|---|---------|
| a) Déterminer le pgcd de 49 et 25 à l'aide de l'algorithme d'Euclide et en déduire que l'équation (E) admet des solutions entières. | 0,75 pt |
| b) Vérifier que le couple (10 ; 5) est une solution particulière de (E). Résoudre l'équation (E). | 1 pt |
| c) Montrer qu'il existe un unique entier p compris entre 1960 et 2018 tel que : $25p \equiv 5[49]$. | 0,25 pt |
| 2° a) Justifier que si (x,y) est une solution de (E) alors $5x \equiv 1[7]$ et $y \equiv 0[5]$. | 0,25 pt |
| b) Montrer que $5x \equiv 1[7]$ si et seulement si $x \equiv 3[7]$. | 0,25 pt |
| 3° a) Soit x un entier relatif. Quels sont les restes de x^2 dans la division euclidienne par 7 ? | 0,25 pt |
| b) Existe-t-il un couple (x,y) d'entiers relatifs tels que (x^2, y^2) soit solution de (E) ? | 0,25 pt |

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (1+4i)z^2 - (9-i)z - 6 + 18i$.

- | | |
|--|--------|
| 1.a) Calculer $P(3i)$ et déterminer les nombres a et b tels que $\forall z \in \mathbb{C} : P(z) = (z-3i)(z^2 + az + b)$ | 0,5 pt |
| b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$. | 0,5 pt |
| c) On considère les points A, B et C images des solutions de l'équation $P(z) = 0$ tels que $ z_C \leq z_B \leq z_A $. Placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC. | 0,5 pt |
| d) Soit $A' = \text{bar}\{(A;-5), (B;6), (C;12)\}$. Vérifier que l'afixe de A' est $z_{A'} = -3 + i$. Placer A' . | 0,5 pt |
| 2° On considère l'ellipse Γ de sommets A, A' et B. | |
| a) Déterminer le centre I et l'excentricité de Γ . | 0,5 pt |
| b) Ecrire une équation cartésienne de Γ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. | 0,5 pt |
| c) Préciser les points d'intersection de Γ avec l'axe (Ox). | 0,5 pt |
| d) Déterminer les foyers et les directrices de Γ puis construire Γ . | 0,5 pt |

Exercice 3 (4 points)

Soit ABCD un parallélogramme tel que $(\overline{AB}, \overline{AD}) = \frac{\pi}{4}$ et $AB = 2AD$.

On définit les points E, F, G et H tels que AFEB et ADGH soient des carrés directs.

Soit I, J et K les milieux respectifs des segments [EC], [CG] et [GA].

- | | |
|--|---------|
| 1° Représenter les données précédentes sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure. | 0,5 pt |
| 2° Soit R_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, T la translation de vecteur \overline{BC} et $f = T \circ R_A$. | |
| a) Quelle est la nature de f ? | 0,25 pt |
| a) Déterminer $f(D)$ puis caractériser f . Quelle est l'image du point F par f ? | 0,5 pt |
| c) Justifier que les segments [DF] et [CG] sont perpendiculaires et de même longueur. | 0,5 pt |
| 3° a) Comparer les vecteurs \overline{DF} et \overline{CE} puis en déduire que le triangle ECG est rectangle isocèle direct en C. | 0,5 pt |
| b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme E en C et C en G. | 0,25 pt |
| c) Vérifier que g est une symétrie glissante dont on donnera la forme réduite. | 0,25 pt |
| 4° Soit S la similitude directe qui transforme B en A et A en D. | |
| a) Déterminer le rapport de S et une mesure de l'angle de S. | 0,5 pt |
| b) Montrer que le centre Ω de S appartient aux cercles Γ_1 et Γ_2 circonscrit respectivement aux carrés AFEB et ADGH. Placer Ω . | 0,25 pt |
| c) Montrer que $S(F) = G$ puis en déduire que $S(\Gamma_1) = \Gamma_2$. | 0,25 pt |
| d) Soit M un point de Γ_1 et $M' = S(M)$. Montrer que les points A, M et M' sont alignés. | 0,25 pt |

Exercice 4 (4 points)

1° a) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 6y' + 8y = 0$.

- | | |
|--|---------|
| b) Déterminer la solution y_0 de (E) dont la courbe passe par le point A(0, -1) et admet en ce point une tangente horizontale. | 0,25 pt |
| | 0,25 pt |

2° Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Calculer et interpréter les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. 0.75 pt

b) Dresser le tableau de variations de f . 0.75 pt

3° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty, 0]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera. 0.25 pt

b) Calculer et interpréter $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g^{-1}(x)}{x+1}$ où g^{-1} est la réciproque de g . 0.25 pt

c) Soit (C') la courbe de g^{-1} . Montrer que les courbes (C) et (C') se coupent en un unique point B d'abscisse α tel que $-0,6 < \alpha < -0,5$. 0.25 pt

d) Tracer dans le même repère les courbes (C) et (C') . 0.5 pt

e) Donner l'expression de $g^{-1}(x)$. 0.25 pt

4° Soit S l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C) , (C') et les axes de coordonnées.

a) Montrer que $S = 2 \int_{\alpha}^0 (x-f(x)) dx$. 0.25 pt

b) Calculer la valeur de S en fonction de α et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près. 0.25 pt

Exercice 5 (5 points)

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement. 0.75 pt

2. a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ puis étudier les variations de f' . 0.5 pt

b) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de $f'(x)$. 0.25 pt

3. a) Dresser le tableau de variation de f . 0.25 pt

b) Tracer la courbe (C) . 0.25 pt

3. a) Calculer $\int_0^x \frac{t}{t+1} dt$ et à l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^x (t+1)\ln(1+t) dt$. 0.5 pt

b) En déduire la primitive F de f sur $] -1, +\infty[$ qui s'annule en 0. 0.25 pt

c) Calculer l'aire A_n du domaine plan délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=n$, pour n un entier naturel $n \geq 1$. 0.25 pt

Partie B :

Soit (U_n) la suite définie $\forall n \geq 1$ par $U_n = \frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{3}f(2) + \frac{1}{4}f(3) + \dots + \frac{1}{n}f(n-1) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} f(k)$.

1° Posons $\forall n \geq 1 : V_n = \frac{1}{n+1} f(n)$.

a) Vérifier que $\forall n \geq 1, V_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \ln(n+1)$. 0.5 pt

b) En déduire que $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \ln(n!)$. 0.25 pt

2° Notons $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\forall k \geq 1 ; \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ puis en déduire que $\frac{1}{n} + \ln n \leq S_n \leq 1 + \ln n$. 0.5 pt

b) Montrer que $\forall k \geq 1 ; \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ puis en déduire que $1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq S'_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. 0.5 pt

c) En déduire que $\forall n \geq 1 : \frac{2}{n} - 2 \leq U_n + \ln((n-1)!) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$. 0.25 pt

- Fin -