

Exercice 1 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$$

(1 pt)

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f: z \rightarrow z' = 1 - iz$ et $g: z \rightarrow z'' = z - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g .

(0,5 pt)

Dans le reste de l'exercice on considère les points I, M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \in]0, 2\pi[$

2) a- Montrer que le triangle IM_1M_2 est rectangle en I , isocèle et direct.

(0,5 pt)

b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points M_1 et M_2 lors que α décrit l'intervalle $]0, \pi[$

(0,5 pt)

c- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle pour α appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$.

(0,5 pt)

3) Soit M_3 le point d'affixe $z_3 = i \sin \alpha + ia$ et soit G l'isobarycentre des points M_1, M_2 et M_3

a- Vérifier que $z_G = \frac{1 + \cos \alpha}{3} + i \frac{(-1 + 2 \sin \alpha)}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha \in]0, \pi[$, le point G appartient à une ellipse Γ dont on donnera une équation.

(0,5 pt)

b- Préciser les sommets et l'excentricité de Γ puis la construire dans le repère précédent.

(0,5 pt)

Exercice 2 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral direct de côté 4 cm, et de cercle circonscrit Γ , les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On pose $A' = s_B(A)$.

1) a- Faire une figure illustrant les données que l'on complètera au fur et à mesure. On prendra (AB) horizontale.

(0,75 pt)

b- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g vérifiant $g(B) = A$ et $g(A') = B$. Vérifier que g est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

(0,75 pt)

c- Soit r la rotation qui transforme C en B et J en K . Déterminer un angle et le centre de r .

(0,5 pt)

2) Soit s la similitude directe qui transforme A en B et C en I , et on pose $h = s \circ r$

a- Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de s .

(0,5 pt)

b- Soit Ω le centre de s . Montrer que $\Omega \in \Gamma$ et que les points Ω, A et I sont alignés. Placer alors Ω .

(0,5 pt)

c- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de h .

(0,5 pt)

3) Soit M un point de Γ distinct de Ω , on pose $M' = s(M)$ et $M_1 = r(M)$

a- Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est rectangle.

(0,5 pt)

b- Montrer que la droite (MM') passe par un point fixe que l'on déterminera.

(0,5 pt)

c- Montrer que les points M_1, M et M' sont alignés.

(0,25 pt)

4) On pose $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = s(M_n)$

a- Déterminer M_1 et construire M_2 .

(0,25 pt)

b- Vérifier que $M_{2017} \in (\Omega B)$

(0,5 pt)

c- Pour tout entier naturel n , on pose $L_n = M_n M_{n+1}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n L_k$ exprimer S_n en fonction de n , puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(0,5 pt)

Exercice 3 (5 points)

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur \mathbb{R} par : $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}}$ et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe à déterminer. (0,5 pt)
- 2) a- Dresser le tableau de variation de f_0 . (0,5 pt)
- b- On considère les points M et N de la courbe (C_0) d'abscisses respectives x et $-x$. Déterminer les coordonnées de A, milieu de $[MN]$, que représente A pour (C_0) ? (0,5 pt)
- 3) a- Montrer que les courbes (C_0) et (C_1) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. (0,25 pt)
- b- Dédurre le tableau de variation de f_1 (0,25 pt)
- c- Construire (C_0) et (C_1) dans le même repère. (0,5 pt)
- 4) On suppose que n est strictement supérieur à 1.
- a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$. Interpréter. (0,75 pt)
- b- Calculer f'_n et dresser le tableau de variation de f_n . (0,5 pt)
- 5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, $n \in \mathbb{N}$
- a- Justifier l'existence de (u_n) puis vérifier que $u_0 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$ (0,5 pt)
- b- Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$ et que $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$ puis déduire u_1 et u_2 (0,5 pt)
- c- Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite. (0,25 pt)

Exercice 4 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

- 1) a- Dresser le tableau de variation de f . (0,75 pt)
- b- Dédurre que pour tout entier $n \geq 6$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans l'intervalle $[1, \sqrt{e}]$ une seule solution notée a_n (0,25 pt)
- c- Prouver que la suite (a_n) est décroissante, en déduire qu'elle converge. (0,5 pt)
- 2) a- Montrer que pour tout entier k strictement supérieur à 1, on a : $\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\ln x}{x^2} dx \leq \frac{\ln k}{k^2}$ (0,5 pt)
- b- Utiliser une intégration par parties pour exprimer en fonction de n l'intégrale : $\int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx$, $n \geq 2$. (0,5 pt)
- 3) Pour tout entier n supérieur strictement à 1, on pose : $S_n = \frac{\ln 2}{2^2} + \frac{\ln 3}{3^2} + \frac{\ln 4}{4^2} + \dots + \frac{\ln n}{n^2}$
- a- Montrer que $S_n - \frac{\ln(2)}{(2)^2} \leq \int_2^n \frac{\ln x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\ln(n)}{(n)^2}$ (0,5 pt)
- b- En déduire que : $\frac{1 + \ln 2}{2} - \frac{n + (n-1)\ln(n)}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2 + 3\ln 2}{4} - \frac{1 + \ln(n)}{n}$ (0,25 pt)
- 4) Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^{k-1}}{k!}$ et $I_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$
- a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leq I_n \leq \frac{(\ln 2)^n}{n!}$ En déduire la limite de I_n (0,5 pt)
- b- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2} \frac{(\ln 2)^{n+1}}{(n+1)!}$ (0,5 pt)
- c- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\ln 2}{1!} + \frac{(\ln 2)^2}{2!} + \dots + \frac{(\ln 2)^n}{n!} \right]$ (0,25 pt)
- d- Exprimer (u_n) en fonction de I_n . En déduire la limite de (u_n) . (0,5 pt)

Fin.