Baccalauréat 2012

Session Normale

Séries : Science de la Nature
Epreuve: Mathématiques
Durée: 4 heures
Coefficients: 6

<u>Exercice 1</u>(3 points)

Pour éclairer une salle, on utilise deux lampes différentes.
On note **F** l'événement : « la première lampe est défaillante » et **G** l'événement: « la deuxième lampe est défaillante ». Des études ont montré que : $p(F)=0,2$; $p(G)=0,3$; $p(F\cap G)=0,1$.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

1) La probabilité de l'événement : « les deux lampes sont défaillantes » est : **(0,5 pt)**

A : 0,1	**B : 0,5**	**C : 0,6**

2) La probabilité de l'événement : « au moins une des deux lampes est défaillante » est : **(0,5 pt)**

A : 0,9	**B : 0,4**	**C : 0,6**

3) La probabilité de l'événement : « les deux lampes fonctionnent » est : **(0,5 pt)**

A : 0,8	**B : 0,6**	**C : 0,5**

4) La probabilité de l'événement : « exactement une des deux lampes est défaillante » est : **(0,5 pt)**

A : 0,3	**B : 0,4**	**C : 0,6**

5) Sachant que la deuxième lampe est défaillante, la probabilité que la première lampe fonctionne est : **(0,5 pt)**

A : $\frac{1}{2}$	**B :** $\frac{2}{3}$	**C :** $\frac{1}{3}$

6) On définit une variable aléatoire **X** égale au nombre de lampes défaillantes dans la salle.
L'espérance mathématique de **X** est : **(0,5 pt)**

A : 0,8	**B : 0,6**	**C : 0,5**

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

<u>Exercice 2</u>(4 points)

1.a) Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe, l'équation : $z^2-4z+5=0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que $\mathrm{Im}(z_1)>0$. **(1 pt)**

b) Ecrire le nombre $z_3=i+z_1$ sous forme trigonométrique. **(0,5 pt)**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points **A** et **B** d'affixes respectives $z_A=z_1$ et $z_B=-1-i+z_2$.

a) Placer les points **A** et **B**. Déterminer la nature du triangle **OAB**. **(0,5 pt)**

b) Déterminer l'affixe du point **C** tel que le quadrilatère **OACB** soit un parallélogramme. Placer **C**. **(0,5 pt)**

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1-2i$ on pose : $f(z)=\dfrac{z-2-i}{z-1+2i}$

a) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\omega=f(3-i)$. Interpréter géométriquement. **(0,75 pt)**

b) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points **M** du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$. **(0,25 pt)**

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points **M** du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur. **(0,25 pt)**

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_3 des points **M** du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$. **(0,25 pt)**

<u>Exercice 3</u> (6 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f(x)=e^{-2x-1}+3x-1}$.

Soit $\mathbf{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathbf{f(x)-(3x-1)}\right)$ et interpréter graphiquement. **(0,75 pt)**

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{f(x)=+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathbf{\dfrac{f(x)}{x}=-\infty}$ interpréter graphiquement. **(0,75 pt)**

2.a) Calculer la dérivée $\mathbf{f'(x)}$ et étudier son signe. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,5 pt)**

3.a) Montrer que l'équation $\mathbf{f(x)=0}$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que $\mathbf{-1,3<\alpha<-1,2}$ et $\mathbf{0,2<\beta<0,3}$. **(0,5 pt)**

b) Représenter la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,5 pt)**

4) On définit les suites $\mathbf{(U_n)}$ et $\mathbf{(V_n)}$ pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ par : $\mathbf{U_n=e^{-2n-1}}$, $\mathbf{V_n=3n-1}$.

a) Démontrer que la suite $\mathbf{(U_n)}$ est géométrique décroissante. **(0,5 pt)**

b) Démontrer que la suite $\mathbf{(V_n)}$ est arithmétique croissante. **(0,5 pt)**

c) Les suites $\mathbf{(U_n)}$ et $\mathbf{(V_n)}$ sont elles adjacentes ? Justifier. **(0,5 pt)**

5) Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ on pose : $\mathbf{S_n=f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n)}$.

a) Calculer $\mathbf{S_n}$ en fonction de $\mathbf{n}$. **(0,5 pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{S_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbf{\dfrac{S_n}{n^2}}$. **(0,5 pt)**

<u>Exercice 4</u> (7 points)

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $\mathbf{]-1,+\infty[}$ par : $\mathbf{f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}-\ln(x+1)}$.

Soit $\mathbf{(C)}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$ d'unité **1cm**.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathbf{\dfrac{f(x)}{x}}$ et interpréter graphiquement. **(0,5 pt)**

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-1^+}\mathbf{f(x)=-\infty}$ et interpréter graphiquement. **(0,5 pt)**

2.a) Calculer $\mathbf{f'(x)}$ et vérifier que la courbe $\mathbf{(C)}$ admet au point d'abscisse **0** une tangente horizontale dont on donnera une équation. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. **(0,5 pt)**

3.a) Calculer $\mathbf{f''(x)}$ et vérifier que la courbe $\mathbf{(C)}$ admet un point d'inflexion **A** d'abscisse **1**. **(0,5 pt)**

b) Ecrire une équation de la tangente **(T)** à la courbe $\mathbf{(C)}$ au point **A**. **(0,5 pt)**

4.a) Montrer que la restriction **g** de **f** sur $\mathbf{I=[0,+\infty[}$ réalise une bijection de **I** sur un intervalle **J** que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

b) Dresser le tableau de variation de $\mathbf{g^{-1}}$. **(0,5 pt)**

c) Calculer $\mathbf{\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{3-2\ln 2}{2}\right)}$ **(0,25 pt)**

5.a) Montrer que l'équation $\mathbf{f(x)=0}$ admet exactement deux solutions α et β. Vérifier que $\mathbf{-0,7<\alpha<-0,6}$ et $\mathbf{5,3<\beta<5,4}$. **(0,5 pt)**

b) Placer, sur le repère $\mathbf{(O;\vec{i},\vec{j})}$, les points d'intersections la courbe $\mathbf{(C)}$ avec les axes, son point d'inflexion, les tangentes précédentes puis représenter la courbe $\mathbf{(C)}$. **(0,5 pt)**

c) Représenter la courbe $\mathbf{(C')}$ de $\mathbf{g^{-1}}$ dans le repère précédent. **(0,25 pt)**

6.a) Montrer que la fonction **f** admet des primitives sur $\mathbf{]-1,+\infty[}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer les réels **a** et **b** tels que la fonction $\mathbf{F(x)=ax-(x+b)\ln(x+1)}$ soit une primitive de **f** sur $\mathbf{]-1,+\infty[}$. **(0,5 pt)**

c) Calculer, en fonction de β, l'aire du domaine plan délimité par la courbe $\mathbf{(C)}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation respectives $\mathbf{x=0}$ et $\mathbf{x=\beta}$. Donner une valeur approchée de cette aire à $\mathbf{10^{-2}}$ près. **(0,5 pt)**

Fin.