

# Baccalauréat 2013 Session Normale

Séries : C & TMGM  
 Epreuve : Mathématiques  
 Durée: 4 heures  
 Coefficients: 9 & 6

### Exercice 1 (3 points)

On considère l'équation (E) :  $25x - 9y = 5$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

1.a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $25u + 9v = 1$ . En déduire une solution particulière  $(x_0, y_0)$  de (E). (1 pt)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E). (0,75 pt)

2) On désigne par  $d$  le PGCD de  $x$  et  $y$  où  $(x, y)$  est une solution particulière de (E).

a) Quelles sont les valeurs possibles de  $d$ ? (0,5 pt)

b) Quelles sont les solutions  $(x, y)$  de (E) telles que  $x$  et  $y$  soient premiers entre eux? (0,5 pt)

c) Peut-on trouver un couple  $(x, y)$  d'entiers relatifs tel que  $(x^2, y^2)$  soit solution de (E)? Justifier votre réponse. (0,25 pt)

### Exercice 2 (3.5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (9-i)z^2 + (28-5i)z - 32 + 4i$ .

1.a) Calculer  $P(4)$  et déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z-4)(z^2 + az + b)$  (1 pt)

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . (0,5 pt)

2) On considère les points  $A, B$  et  $C$  images des solutions de l'équation  $P(z) = 0$  tels que  $z_A = 4$ ,  $\text{Im } z_B > 0$  et  $\text{Im } z_C < 0$ .

a) Donner l'expression complexe de la similitude directe  $s$  de centre  $C$  qui transforme  $A$  en  $B$ . (0,5 pt)

b) Déterminer le rapport et un angle de  $s$ . (0,5 pt)

3) Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $Q(z) = z^2 - (5-i)z + 8 - i$ .

On note  $\Gamma$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Q(z)$  soit imaginaire pur (ou nul).

a) En posant  $z = x + iy$ , donner une équation cartésienne de  $\Gamma$  et montrer que  $\Gamma$  est une hyperbole de centre  $\Omega(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$ . (0,5 pt)

b) Préciser les sommets et les asymptotes de  $\Gamma$  puis la construire. (0,5 pt)

### Exercice 3 (4 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (3-x)e^x$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty.$$

(0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,5 pt)

c) Tracer la courbe  $(C)$ . (0,25 pt)

d) Vérifier que la fonction  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' - y = -e^x$  et calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 3$ . (0,5 pt)

2) On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par :

$$U_n = \frac{3^n}{n!}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $0 \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq \frac{3}{4}$ . (0,5 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 3$ ,  $0 \leq U_n \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ . (0,5 pt)

3) Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ; on pose  $I_n = \frac{1}{n!} \int_0^3 (3-x)^n e^x dx$  et

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!}.$$

a) Justifier que  $I_1 = e^3 - 4$  (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,  $0 \leq I_n \leq (e^3 - 1)U_n$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ . (0,5 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que  $I_{n+1} = I_n - U_{n+1}$ . (0,25 pt)

d) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ ,

$$e^3 = 1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \dots + \frac{3^n}{n!} + I_n. \text{ En déduire que } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^3. \text{ (0,25 pt)}$$

#### Exercice 4 (4.5 points)

1) On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par

$$\begin{cases} g(x) = 1 + x^3 - 3x^3 \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

a) Montrer que  $g$  est continue en  $0^+$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ . (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de  $g$ . (0,5 pt)

c) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$  et que  $1 < \alpha < 2$ . En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $]0, +\infty[$ . (0,5 pt)

2) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^3}$ .

a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . (0,5 pt)

b) Vérifier que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ;  $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^3)^2}$ . En déduire le tableau de variation de  $f$ . (0,5 pt)

3) Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on pose  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]1, +\infty[$ . Calculer  $F'(x)$  et déterminer le sens de variations de  $F$ . (0,5 pt)

b) Vérifier que pour tout  $t$  de  $]1, +\infty[$ , on a :  $\frac{\ln t}{(1+t)^3} \leq f(t) \leq \frac{\ln t}{t^3}$  (0,25 pt)

c) En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$ .

d) Déterminer les réels  $a, b$  et  $c$  tels que pour tout  $t > 0$  ;

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1+t)^2} .$$

4.a) En utilisant les résultats précédents, déduire que pour tout  $x \in ]1, +\infty[$  :

$$\frac{-\ln x}{2(1+x)^2} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1-2\ln 2}{4} \leq F(x) \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2}$$

b) On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell$ . Montrer que :  $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \leq \ell \leq \frac{1}{4}$ .

c) Tracer l'allure générale de la courbe de  $F$ .

### Exercice 5 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère le carré direct  $ABCD$  de centre  $O$  et de côté  $a$  ( $a > 0$ ).

$I, J, K$  et  $L$  les milieux respectifs des côtés  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$ .

1.a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure.

b) Montrer qu'il existe une unique rotation  $r$  qui transforme  $C$  en  $O$  et  $K$  en  $I$ .

c) Déterminer un angle et le centre de cette rotation.

2) Soit  $f = S_{LI} \circ S_{JO} \circ S_{OK}$ .

a) Vérifier que  $f = r \circ S_{OK}$  et déterminer  $f(D), f(K)$  et  $f(O)$ .

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$  et donner sa forme réduite.

3.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s_1$  qui transforme  $B$  en  $I$  et  $L$  en  $A$  puis déterminer le rapport  $\lambda_1$  de  $s_1$ .

b) Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle de  $s_1$ . Montrer que  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

c) Soit  $P$  le centre de  $s_1$ .  $E$  le symétrique de  $C$  par rapport à  $B$ . Montrer que le point  $P$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $BEI$  et  $BAL$ . Préciser  $P$  et le placer sur la figure.

d) Montrer que  $(\vec{PI}, \vec{PA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . En déduire que les points  $A, P$  et  $E$  sont alignés.

4) Soit  $s_2$  la similitude directe de centre  $B$  qui transforme  $C$  en  $L$ . On note  $\beta$  une mesure de son angle. Soit  $g = s_1 \circ s_2$ .

a) Justifier que  $g$  est une similitude directe et déterminer  $g(B)$  et  $g(C)$ .

b) Montrer que  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} [2\pi]$ . En déduire que le centre  $Q$  de  $g$  est situé sur deux cercles que l'on déterminera. Placer  $Q$  sur la figure.

c) Justifier que  $g(O) = P$ . En déduire la construction de l'image du carré  $ABCD$  par  $g$ .

Fin.