

**Baccalauréat**  
**2012**  
 Session Normale

Séries : C & TMGM  
 Epreuve : Mathématiques  
 Durée: 4 heures  
 Coefficients: 9 & 6

**Exercice 1 (3 points)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty. \quad (0,75 \text{ pt})$$

2.a) Dresser le tableau de variation de  $f$ . (0,75 pt)

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera. (0,25 pt)

c) Tracer la courbe  $(C)$ . (0,25 pt)

3. On pose  $I = \int_0^1 f(x) dx$ . On se propose de calculer  $I$  par deux méthodes.

Méthode a : Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}. \quad \text{En déduire } I. \quad (0,5 \text{ pt})$$

Méthode b : En posant  $t = e^x + 1$ , utiliser une intégration par parties pour calculer  $I$ . (0,5 pt)

**Exercice 2 (3 points)**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On considère les points  $A(2; 1; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ,  $C(4; 1; 4)$ ,  $D(5; 3; -2)$  et  $E(6; -2; -4)$ .

1.a) Calculer  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{DE}$ . Vérifier que le vecteur  $\overline{DE}$  est normal au plan  $(ABC)$  (1 pt)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ . (0, 25 pt)

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(DE)$ . (0, 5 pt)

d) Déterminer les coordonnées du point  $F$  projeté orthogonal de  $D$  sur le plan  $(ABC)$ .

Déterminer un réel  $k$  tel que  $\overline{EF} = k\overline{DF}$  (0,5 pt)

2.a) Calculer le volume  $V$  du tétraèdre  $ABCD$ . (On rappelle que  $V = \frac{1}{3} \text{Base} \times \text{Hauteur}$ ). (0,25 pt)

b) Déterminer les deux ensembles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des points  $M$  de l'espace définis par :

$$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow 11MD^2 - ME^2 = -30 \quad (0,25 \text{ pt})$$

$$M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow MD^2 - ME^2 = -36. \quad (0,25 \text{ pt})$$

**Exercice 3 (4 points)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans  $\mathbb{C}$ , on considère l'équation  $E_\theta : z^2 - (6 \cos \theta)z + 4 + 5 \cos^2 \theta = 0, \theta \in [0, 2\pi[$ .

1.a) Résoudre, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $E_\theta$ . On note  $z_1, z_2$  les solutions de  $E_\theta$  avec

$\text{Im}(z_1) \geq 0$  si  $\theta \in [0, \pi[$  (1 pt)

- b) Préciser les valeurs de  $\theta$  et les solutions de  $E_\theta$  dans les cas suivants :
- L'équation  $E_\theta$  admet des solutions doubles. Dans ce cas on note  $A_1$  et  $A_2$  les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$  avec  $\text{Re}(z_1) \geq 0$ . (0,25 pt)
  - L'équation  $E_\theta$  admet deux solutions imaginaires pures. Dans ce cas on note  $B_1$  et  $B_2$  les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$  avec  $\text{Im}(z_1) \geq 0$ . (0,25 pt)
2. Dans le cas général on note  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1, z_2$ .
- a) Déterminer le lieu géométrique  $\Gamma$  des points  $M_1$  et  $M_2$  lorsque  $\theta$  décrit  $\theta \in [0, 2\pi[$ . (1 pt)
  - b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble  $\Gamma$  et le construire. (0,5 pt)
3. On définit l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$ , barycentre du système  $\{(A_1, -4); (B_1, 2); (M, 3)\}$ .
- a) Ecrire  $z'$  en fonction de  $z$  puis reconnaître  $f$  et donner ses éléments caractéristiques. (0,5 pt)
  - b) Donner une équation cartésienne de  $\Gamma' = f(\Gamma)$ . Donner les éléments caractéristiques de  $\Gamma'$  dans  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . (0,5 pt)

#### Exercice 4 (4 points)

On se propose dans cet exercice de calculer la limite de la suite numérique de terme général  $U_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ ,  $n \geq 2$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - \ln x$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$ . (1 pt)
2. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ; on pose  $I(\lambda) = \int_\lambda^1 f(x) dx$ .
  - a) En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_\lambda^1 \ln x dx$ . (0,5 pt)
  - b) En déduire le calcul de  $I(\lambda)$  puis  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$ . (0,5 pt)
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ;  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq k \leq n$  on pose :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .
  - a) Montrer que :  $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ ; pour  $1 \leq k \leq n-1$ . (0,25 pt)
  - b) En déduire que :  $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$  puis que :  $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ . (0,5 pt)
  - c) En utilisant 3.b) montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{2}$ . (0,25 pt)
- 4.a) Montrer que :  $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$  et que  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ . (0,5 pt)
- b) En déduire que :  $S_n = \frac{n^2 + n}{2n^2} - \ln U_n$ . (0,25 pt)
- c) Déduire de ce qui précède  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ . (0,25 pt)

### Exercice 5 (6 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral direct  $ABC$  de côté  $a$ , ( $a > 0$ ), de centre  $G$ . Soient  $I$ ,  $J$  et  $K$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$ ,  $[CA]$  et  $[AB]$ . Le point  $E$  est le symétrique de  $K$  par rapport à  $I$ .

1. Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (0,5 pt)

2.a) Montrer qu'il existe une unique rotation  $r_1$  qui transforme  $B$  en  $I$  et  $J$  en  $A$ . (0,5 pt)

b) Déterminer les éléments caractéristiques de  $r_1$ . (0,5 pt)

3. Soit  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{AJ}$ . On pose :  $r_2 = t \circ r_1$  et  $f = s_{JC} \circ s_{JE} \circ s_{KE}$ .

a) Déterminer  $r_2(J)$  et caractériser  $r_2$ . (0,5 pt)

b) Déterminer deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  telles que  $r_1 = s_{KC} \circ s_{\Delta_1}$  et  $r_2 = s_{JC} \circ s_{\Delta_2}$ . En déduire que  $f = t_{AJ} \circ s_{KC}$ . (0,5 pt)

c) Déterminer l'image du triangle  $BIK$  par  $f$ . Justifier que  $f$  est une symétrie glissante et donner sa forme réduite. (0,5 pt)

4.a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe  $s$  qui transforme  $E$  en  $I$  et  $C$  en  $G$ . (0,5 pt)

b) Déterminer un angle et le rapport de  $s$ . (0,5 pt)

c) Montrer que le centre de  $s$  est situé sur les cercles circonscrits aux triangles  $BCG$  et  $BEI$ . Préciser ce centre. (0,25 pt)

5. Dans cette question,  $M$  est un point variable du cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[BC]$ .

On note  $s(M) = M'$ .

a) Déterminer le lieu géométrique  $\Gamma'$  du point  $M'$  lorsque  $M$  décrit  $\Gamma$ . (0,25 pt)

b) Montrer que pour tout point  $M$  de  $\Gamma$  distinct de  $B$ , la droite  $(MM')$  passe par le point  $K$ . (0,25 pt)

c) En déduire un programme de construction de  $M'$  à partir d'une position de  $M$  sur  $\Gamma$ . Placer  $M$  et  $M'$  en supposant que les points  $B, M$  et  $C$  se succèdent dans le sens trigonométrique sur  $\Gamma$ . (0,25 pt)

6) Pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , on pose :  $s^2 = s \circ s$  et  $s^n = s \circ s^{n-1}$ . On définit une suite de points  $(M_n)$  par  $M_0 = E$ ;  $M_1 = s(M_0)$  et  $M_n = s^n(M_0)$ .

a) Sur une nouvelle figure, placer les points  $B, M_0, M_1, M_2, M_3$  (Pour la construction, on pourra prendre la droite  $(BE)$  verticalement avec  $BE = 6\text{cm}$ ). (0,25 pt)

b) Calculer en fonction de  $n$  et  $a$  la somme :  $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$ . (0,25 pt)

c) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  et l'interpréter. (0,25 pt)

d) Justifier que :  $M_{1960} \in (BM_4)$  et  $M_{2012} \in (BG)$ . (0,25 pt)

Fin.