ECOLES PRIVEES
ELMAARIF- ERRAJA

مدارس
الرجاء والمعارف الحرة

| Classes :7C | Exercices de révision pour le Bac blanc | 12/2019 |
| --- | --- | --- |

# 1- Systèmes linéaires et matrices

## Exercice 1

**Résoudre le système suivant en utilisant la méthode du pivot de Gauss :**

$$\begin{cases} 2x+y+z-5t=-13 \\ 4x-y+2t=21 \\ x+3y-2z=-4 \\ x+2y-z+t=3 \end{cases}$$

## Exercice 2

**En utilisant la méthode du pivot de Gauss, résoudre le système suivant :**

$$\begin{cases} 2x-y-z+3t=0 \\ x+y+2z-2t=6 \\ 5x-2y+3t=7 \\ 3x-2z+3t=1 \end{cases}$$

## Exercice 3

**On considère le système linéaire $S_a$ où a est un paramètre réel :**

$$\begin{cases} x+y-az=a \\ x+ay+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

**1) Pour $a=4$, résoudre le système en utilisant la méthode de Cramer.**

**2) Résoudre le système $S_1$ pour $a=1$.**

**3) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'ensemble des solutions du système linéaire $S_a$ :**

## Exercice 4

**Soit la matrice** $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

**1) Déterminer la matrice M telle que $A = M - I_3$.**

**2) Vérifier que $M^2$ est la matrice nulle. En déduire $A^2$.**

**3) Déduire $A^{-1}$**

**4) Résoudre le système** $\begin{cases} -2x-2y+z=-7 \\ 3x+5y-3z=14 \\ 5x+10y-6z=26 \end{cases}$

## Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2$ et vérifier que $A^2 = A + 2I_2$ où $I_2$ est la matrice identité d'ordre 2 .

2) En déduire une expression de $A^3$ sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où $\alpha$ et $\beta$ des réels.

3) On considère les suites numériques $(r_n)$ et $(s_n)$ définies par $\begin{cases} r_0 = 0 \text{ et } s_0 = 1 \\ r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$.

a) Calculer $r_1$ , $s_1$ ; $r_2$ , $s_2$; $r_3$ et $s_3$.

b) Vérifier que $A^2 = r_2A + s_2I_2$ et $A^3 = r_3A + s_3I_2$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $A^n = r_nA + s_nI_2$ . (On admet que $A^0 = I_2$)

4) Démontrer que la suite $(k_n)$ définie par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison $-1$ .
En déduire l'expression de $k_n$ en fonction de n.

5) On admet que la suite $(t_n)$ définie par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison2.

a) Déduire l'expression de $t_n$ en fonction de n.

b)Déduire des questions précédentes, une expression explicite de $r_n$et $s_n$ en fonction de n

c)En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice $A^n$.

## Exercice 6

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$ puis en déduire que les matrices $P$ et $Q$ sont inverses l'une de l'autre.

2) Vérifier que $Q \times A \times P = B$ et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $B^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix}$.

3) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $A^n = P \times B^n \times Q$ et en déduire l'expression de $A^n$ en fonction de n.

# 2- Nombres complexes

## Exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application *f* du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe *z'* telle que : $z' = z^2$. On note $\Omega$ le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble $\Gamma_1$ des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

a. Exprimer *a* sous forme exponentielle.

b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par *f*.

3. Déterminer l'ensemble $\Gamma_2$ des points M d'affixe *z* tels que l'affixe *z'* du point M' soit un nombre imaginaire pur.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble $\Gamma_3$ des points M distincts de $\Omega$ pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en $\Omega$.

a. Montrer que M est un point de $\Gamma_3$ si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq 1$.

b. En déduire l'ensemble $\Gamma_3$.

5. Soit M un point d'affixe *z* différente de 0 et de 1.

a. Exprimer $(\overline{OM}, \overline{OM'})$ en fonction d'un argument de $z$.

b. En déduire l'ensemble $\Gamma_4$ des points M distincts de O et de $\Omega$ tels que O, M et M′ soient alignés.

## Exercice 2 (Bac 2009 sc)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soit la transformation ponctuelle $f_\omega$ qui associe à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que : $z' = (\frac{1}{2} + \omega i)z + 1 - 2\omega i, \quad \omega \in \mathbb{C}$.

1. Reconnaître et caractériser la transformation $f_\omega$ pour les valeurs suivantes du nombre complexe $\omega$ :

a) $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\omega = -\frac{1}{2}i$ c) $\omega = 1 + \frac{1}{2}i$ d) $\omega = 2i$.

2. Dans la suite de l'exercice on considère $\omega \in \mathbb{R}$ et on pose $\theta = \arg(\frac{1}{2} + \omega i)$ avec $\theta \in ]-\pi;\pi]$. On considère les points $A(2;0)$ et $M_0(3;0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $M_{n+1} = f_\omega(M_n)$ et on désigne $z_n$ l'affixe de $M_n$.

a) Vérifier que $z_1 = \frac{5}{2} + \omega i$ puis calculer $z_2$ en fonction de $\omega$.

b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $z_n = 2 + \left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^n e^{in\theta}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $V_n = |z_n - 2|$. Montrer que la suite $(V_n)$ est géométrique puis déterminer les valeurs de $\theta$ pour lesquelles la suite $(V_n)$ est convergente.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $d_n = \left\|\overline{M_n M_{n+1}}\right\|$. Montrer que $d_n = V_{n+1}$ puis calculer, en fonction de $n$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$ , en donner une interprétation géométrique.

## Exercice 3 (Bac 2017)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) a- Soit a un nombre réel, résoudre dans l'ensemble de nombres complexes l'équation d'inconnue z : $(1+i)z^2 - 2(a+1)z - (-1+i)(a^2+1) = 0$

b- Soient f et g les transformations données par leurs expressions complexes $f : z \to z' = 1 - iz$ et $g : z \to z'' = z - i$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations f et g.

Dans le reste de l'exercice on considère les points I, $M_1$ et $M_2$ d'affixes respectives $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 1 - ia$ et $z_2 = a - i$ où $a = e^{i\alpha}$, $\alpha \in ]0, 2\pi[$

2) a- Montrer que le triangle $IM_1M_2$ est rectangle en I, isocèle et direct.

b- Préciser les lieux géométriques de chacun des points $M_1$ et $M_2$ lors que $\alpha$ décrit l'intervalle $]0,\pi[$

c- Ecrire $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle pour $\alpha$ appartenant à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Soit $M_3$ le point d'affixe $z_3 = i\sin\alpha + ia$ et soit G l'isobarycentre des points $M_1$, $M_2$ et $M_3$.

a- Vérifier que $z_G = \frac{1+\cos\alpha}{3} + i\frac{(-1+2\sin\alpha)}{3}$ puis montrer que, pour $\alpha \in ]0,\pi[$, le point G appartient à une ellipse $\Gamma$ dont on donnera une équation.

b- Préciser les sommets et l'excentricité de $\Gamma$ puis la construire dans le repère précédent.

**Exercice 4 (Bac 2012)**

**Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.**

**1. Pour tout nombre complexe $z$, on pose : $P(z)=z^3-(4-2i)z^2+(4-6i)z-4+8i$.**

**a) Calculer $P(-2i)$ et déterminer les nombres $a$ et $b$ tels que pour tout $z$ de $\mathbb{C}$ :**

$$P(z)=(z+2i)(z^2+az+b)$$

**b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z)=0$.**

**2. Soient $A$, $B$ et $C$ les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.**

**a) Placer les points $A$, $B$ et $C$.**

**b) Calculer l'affixe du point $G$ barycentre du système $\{(O;3),(A;-4),(B;1),(C;2)\}$. Vérifier que $A$ est le barycentre du système $\{(O;5),(B;-5),(G;2)\}$.**

**c) Déterminer et représenter l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ d'affixe $z$ telle que le nombre $\dfrac{z-1-i}{z+2i}$ soit imaginaire pur.**

**3. Pour tout point $M$ du plan on pose : $\varphi(M)=3MO^2-4MA^2+MB^2+2MC^2$ et on note $\Gamma_k$ l'ensemble des points $M$ tels que $\varphi(M)=k$, où $k$ est un réel.**

**a) Discuter suivant les valeurs de $k$, la nature de $\Gamma_k$.**

**b) Déterminer et construire $\Gamma_{16}$.**

**Exercice 5**

**Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle C de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle C , et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct MAPN et MKLO.**

**Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et démontrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.**

**On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1. On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$. On note k, l ,m, n et p les affixes respectives des points K, L, M, N et P.**

**1.a) Illustrer les données par une figure.**

**b) Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle C , on a $\left|m-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$.**

**2) Écrire en fonction de m chacun des nombres complexes k,l,n et p.**

**3. a) Démontrer que le milieu $\Omega$ du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle C .**

**b) Démontrer que le point $\Omega$ appartient au cercle C et préciser sa position sur ce cercle.**

**4. a) Montrer que, lorsque M décrit le cercle, alors la somme des aires des carrées MANP et MKLO reste constante. En déduire que la distance KN est constante.**

**b) Quelle est la nature du triangle $\Omega$NK ?**

**5) Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.**

**6) Déterminer et construire chacun des lieux géométriques des points :**

**R centre du carrée MAPN ;**

**S centre du carrée MKLO ;**

**T milieu du segment [KN].**

## Exercice 6

**Soit ABCD un quadrilatère convexe direct. On construit quatre carrés de centres respectifs P,Q,R et S qui s'appuient extérieurement sur les côtés [AB],[BC,[CD],[DA].**
**On considère un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ dans lequel les points A, B, C , D , P,Q,R et S ont pour affixes respectives a, b, c , d, p,q,r et s.**
**1) Le but de cette question est de démontrer que les segments [QS] et [PR] sont perpendiculaires et de même longueur.**

**a) Démontrer que dans le carré construit sur [AB] on a:** $p=\dfrac{a-ib}{1-i}$.

**b) Etablir des relations analogues pour q,r et s.**

**c) Calculer** $\dfrac{s-q}{r-p}$. **Conclure.**

**2) Démontrer que les quadrilatère ABCD et PQRS ont le même centre de gravité.**
**3) Démontrer que si le quadrilatère PQRS est un carré, alors ABCD est un parallélogramme.**

## Exercice 7

**Soit** $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ **et** $E(\theta)$ **l'équation :** $z^2-(3+i)ze^{i\theta}+2(1+i)e^{2i\theta}=0$.

**1° a) Résoudre** $E(\theta)$, **on note** $z'$ **et** $z''$ **les solutions telles que** $|z'|>|z''|$.

**b) Mettre sous forme exponentielle le nombre** $z''$.

**2° Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé** $(O;\vec{u},\vec{v})$. **On considère les ponts** $A,B,C$ **d'affixes respectives** $2e^{i\theta},(1+i)e^{i\theta},ie^{i\theta}$.

**a) Montrer que les droites** $(OA),(OC)$ **d'une part et** $(BO),(BA)$ **d'autre part sont perpendiculaires.**

**b) Pour** $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, **placer les points** $A,B,C$.

**c) Montrer que** $OABC$ **est un trapèze rectangle.**
**d) Montrer que l'aire du quadrilatère** $OABC$ **est indépendante de** $\theta$.

## Exercice 8

**Soit** $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+1)^2}$, **pour tout** $z\in\mathbb{C}-\{1\}$

**1° a) Montrer que l'équation** $f(z)=z$ **admet une solution imaginaire pure** $z_0$

**b) Résoudre dans** $\mathbb{C}$ **l'équation** $f(z)=z$, **soit** $z_0,z_1$ **et** $z_2$ **ses solutions avec** $Re(z_0)=0$ **et** $Re(z_2)<Re(z_1)$.

**2° a) Montrer que** $1+z_1=e^{i\frac{11\pi}{6}}$ **et** $1+z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

**b) En déduire le module et un argument de chacun des complexes** $z_1$ **et** $z_2$.

**3° Dans cette question on suppose que** $z=e^{i\alpha}$ **avec** $0\le\alpha<\pi$.

**a) Montrer que** $\overline{f(z)}=iz.f(z)$

**b) Déterminer** $\alpha$ **pour que** $f(z)$ **soit un imaginaire pur.**

**c) Ecrire** $f(z)$ **sous forme exponentielle.**

**4° Déterminer** $z$ **tel que** $|z|=1$ **et** $Re[f(z)]=\dfrac{1}{2}$.

## 3- Arithmétique

**Exercice 1**

**Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel $n$, le reste de la division euclidienne de $5^n$ par 7.**

**1. Trouvez le reste de la division euclidienne de $2014^{2013}$ par 7.**

**2. Soit $X = 2011^{2n+1} + 2014^{2n+1}$ .**

**a) Montrez que pour tout entier naturel $n$, X est divisible par 7.**

**b) Montrez que pour tout entier naturel $n$, X est divisible par 25.**

**c) X est – il divisible par 175 ? Justifier.**

**Exercice 2**

**1.a) Déterminer deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $36u + 25v = 1$. Détailler votre démarche.**

**b) En déduire une solution particulière de l'équation $(E_1)$ : $36x - 25y = 1$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.**

**c) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E_1)$.**

**2.a) Vérifier que (-45,- 65) est solution de l'équation $(E_2)$ : $36x - 25y = 5$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$?**

**b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E_2)$.**

**3) On désigne par d le PGCD de x et y où $(x,y)$ est une solution particulière de (E).**

**a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?**

**b) Quelles sont les solutions $(x,y)$ de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?**

**c) Peut-on trouver un couple $(x,y)$ d'entiers relatifs tel que $(x^2, y^2)$ soit solution de (E) ? Justifier votre réponse.**

**Exercice 3**

**Soit $p$ un nombre premier supérieur ou égal à $7$. On pose $n = p^4 - 1$.**

**1° a) Montrer que l'on a : $p \equiv 1\,[3]$ ou $p \equiv -1\,[3]$.**

**b) En déduire que $n$ est divisible par $3$.**

**2° a) Vérifier que $p$ est impair. En justifier qu'il existe un entier naturel $k$ tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$.**

**b) En déduire que $n$ est divisible par $16$.**

**3° a) Quel sont les restes possibles de $p$ modulo $5$ ?**

**b) En déduire que $5$ divise $n$.**

**c) Soit $a$ et $b$ deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que si $a$ et $b$ divisent $c$ alors $ab$ divise $c$.**

**d) En déduire que $240$ divise $n$.**

**Exercice 4**

**Partie A**

**On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où $x$ et $y$ sont des entiers relatifs.**

**1. Vérifier que le**
**couple (13, 3) est solution de cette équation.**

**2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).**

**Partie B**

**Dans cette partie, $a$ désigne un entier naturel et les nombres $c$ et $g$ sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.**

**On rappelle le petit théorème de Fermat :**

***si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1}$ est congru à 1 modulo p, ce que l'on note $a^{p-1} \equiv 1[p]$.***

**1. Soit *x* un entier naturel.**
**Démontrer que si** $x \equiv a[7]$ **et** $x \equiv a[19]$ **alors** $x \equiv a[133]$.

**2. a. On suppose que *a* n'est pas un multiple de 7.**

**Démontrer que** $a^6 \equiv 1[7]$ **puis que** $a^{108} \equiv 1[7]$**. En déduire que** $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$**.**

**b. On suppose que *a* est un multiple de 7. Démontrer que** $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$**.**

**c. On admet que pour tout entier naturel *a*,** $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$**. Démontrer que** $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[133]$**.**

## Exercice 5

**1.a)Déterminer l'ensemble A des entiers relatifs n tels que n+2 divise 5**
**b) Déterminer l'ensemble B des entiers relatifs n tels que n+2 divise** $2n-1$**.**
**2) Montrer que pour tout entier relatif n, les nombres n+2 et** $2n^2+3n-1$ **sont premiers entre eux.**
**3) Déterminer l'ensemble C des entiers relatifs n,** $n \neq -2$**, tels que** $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ **soit un entier relatif.**

## Exercice 6

***1. Résolution d'une équation***
**On considère l'équation (1) :** $11n - 24m = 1$ **d'inconnue (n, m) élément de** $\mathbb{Z}^2$ **.**
**a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.**
**b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).**
**c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).**

***2. Recherche du PGCD de*** $10^{11}-1$ ***et*** $10^{24}-1$
**a. Justifier que 9 divise** $10^{11}-1$ **et** $10^{24}-1$**.**
**b. Soit (n, m) un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1).**
**Montrer que l'on peut écrire** $(10^{11n}-1) - 10(10^{24m}-1) = 9$**.**
**c. Montrer que** $10^{11}-1$ **divise** $10^{11n}-1$
**Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers *N* et *M* tels que :**
$(10^{11}-1)N - (10^{24}-1)M = 9$**.**
**d. Montrer que tout diviseur commun à** $10^{24}-1$ **et** $10^{11}-1$ **divise 9.**
**e. Déduire des questions précédentes le PGCD de** $10^{24}-1$ **et** $10^{11}-1$**.**

## Exercice 7

**En rangeant les n pièces de son puzzle, un enfant constate que :**
**S'il les range par groupe de 5, il lui reste 3 pièces.**
**S'il les range par groupe de 7, il lui reste 2 pièces.**
**S'il les range par groupe de 9, il lui reste 1 pièce.**
**S'il les range par groupe de 11, il ne lui reste plus de pièces.**
**Sa mère affirme qu'alors 2n-11 est divisible par 5, 7, 9 et 11.**
**1) A-t-elle raison ?**
**2) Combien ce puzzle contient de pièces sachant que ce nombre est inférieur à 2020 ?**