Publications AMIMATHS

أصدقاء الرياضيات
AMIMATHS
موريتانيا

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

CONTROLE CONTINU

MATHEMATIQUES

BAC
D

Horma Hamoud

- QCM
- Vrai - Faux
- Questions à trous
- Questions de cours
- Exercices type BAC

CONTROLE CONTINU DE MATHS

Terminale Sciences de la Nature

7D

Horma Hamoud

Si vous décelez une erreur, nous vous remercions par avance de nous en faire part :

e-mail : aamimaths@gmail.com

AMIMATHS

Table des matières

Avant Propos

Les contrôles continus revêtent une importance significative dans tout système éducatif. C'est un outil incontournable pour permettre aux élèves de développer leurs compétences tout au long de l'année scolaire, et d'avoir une vision plus complète de leurs connaissances et de leurs capacités pour préparer efficacement les examens finaux

Ce manuel de contrôles continus en mathématiques est destiné aux élèves de la terminale, série sciences de la nature. Les sujets proposés comportent plusieurs types d'exercices de difficultés graduées : QCM ; Vrai / Faux ; questions à trous ; questions de cours ; exercices d'application directe ; lecture graphique ; problèmes de la vie quotidienne ; exercices type Bac…

Ces sujets sont conçus pour évaluer de manière régulière et approfondie les connaissances et les compétences des élèves. Ils permettent aux élèves : une Auto-évaluation en temps réel ; une progression guidée dans le programme ; une bonne planification du travail ; une gestion rationnelle du temps pendant chaque trimestre ; et un entrainement efficace pour une meilleure préparation du Bac.

Nous, Association AMIMATHS, espérons que la publication de ce manuel sera une contribution précieuse à l'amélioration des niveaux d'élèves en mathématiques.

PREMIER TRIMESTRE

SUJET 1

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, <u>une seule</u> des réponses proposées est correcte.

	Proposition	A	B	C	D
1	**Si** $Z=\frac{2+i}{2-i}$, **alors**	$\overline{Z}=\frac{1}{Z}$	$Z=\overline{Z}$	Z **est imaginaire pur.**	$Z=1-2i$
2	**Si** $Z=2\sqrt{3}+2i$, **alors**	$\arg Z^2=-\frac{\pi}{3}$	$\arg\overline{Z}=\frac{\pi}{6}$	Z^3 **est un imaginaire pur.**	$\lvert Z\rvert=2\sqrt{2}$
3	**Si** $Z=\frac{-2}{3}(1-i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, **alors**	$\lvert Z\rvert=\frac{-2}{3}$	$\lvert Z\rvert=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$\lvert Z\rvert=\frac{2}{3}(1-i)$	$\lvert Z\rvert=\frac{2}{3}$
4	***Si*** $\overline{z}+\lvert z\rvert=6+2i$ **alors :**	$z=\frac{1}{3}-5i$	$z=-\frac{8}{3}+2i$	$z=\frac{8}{3}+2i$	$z=\frac{8}{3}-2i$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse. <u>Justifier votre réponse.</u>

Question n°	1	2	3	4
Réponse				

Exercice 2 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

3) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres $u = 3 - 3i$ et $v = 1 + i\sqrt{3}$.

4) On pose $w = (3 - 3i)(1 + i\sqrt{3})$.

a) Ecrire w sous forme algébrique.

b) En utilisant 3) écrire w sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 (4 points)

1) Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ du nombre $\Delta = -8 - 6i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B dont les affixes respectives sont les solutions de l'équation (E) avec $\mathrm{Im}(z_A) > 0$.

Placer A et B. Calculer $\frac{z_A}{z_B}$ puis interpréter géométriquement.

Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1+2i$ on pose :

$$f(z)=\frac{z-3-i}{z-1-2i}.$$

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et. $z_B = 3+i$

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

d) Γ_4 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{5}$.

3) Déterminer et représenter dans le repère précédent le point C tel que le quadrilatère OABC soit un parallélogramme.

Présentation et rédaction : 2 points

SUJET 2

Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une réponse <u>au moins</u> est correcte. Choisir <u>les bonnes réponses</u>.

		A	B	C	D
1	**Si** $Z = \frac{2+4i}{2-i}$ **alors**	$\arg Z = \frac{\pi}{2}$	$Z = -\overline{Z}$	Z **est un imaginaire pur.**	$Z = 1-4i$
2	**Si** $Z = \sqrt{3} - i$ **alors**	$\arg Z^2 = -\frac{\pi}{3}$	$\arg \overline{Z} = \frac{\pi}{6}$	**Le point *M* d'affixe** Z **est sur le cercle de centre O, de rayon 1.**	$\lvert Z^2 \rvert = 4$
3	***si*** $\overline{z} + \lvert z \rvert = 6+2i$ **; alors z =**	$\lvert z \rvert = \frac{10}{3}$	$-\frac{8}{3} - 2i$	$\frac{8}{3} + 2i$	$z = \frac{8}{3} - 2i$
4	**Si** $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **alors le triangle *ABC* est :**	**isocèle**	**Équilatéra l**	**rectangl e et isocèle**	**rectangle et non isocèle**
5	**Soit** $z' = \frac{z-2i}{z+2}$ **. L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que** $\lvert z' \rvert = 1$ **est :**	**un cercle de rayon 1**	**une droite**	**une droite privée d'un point**	**un cercle privé de deux points**
6	$\arg\left(\frac{2}{3} i e^{i\frac{\pi}{3}}\right) =$ **est**	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3} \times \frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{-7\pi}{6}$

Exercice 2 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4z + 8 = 0$.

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

3) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres $u = 2 + 2i$ **et** $v = \sqrt{3} - i$.

4) On pose $w = \dfrac{2 + 2i}{\sqrt{3} - i}$.

a) Ecrire w sous forme algébrique.

b) En utilisant 3) écrire w sous forme trigonométrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ **et** $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -3 - 2i$ on pose :

$$f(z) = \frac{z - 2 - i}{z + 3 + 2i}.$$

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2) Calculer le nombre $p = f(1 - 2i)$ puis l'écrire sous forme algébrique.

3) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = -3 - 2i$ et $z_C = 1 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Ecrire le nombre $q = f(z_C)$ sous forme trigonométrique. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Γ_3 tel que $|f(z) - 1| = 2\sqrt{34}$.

Exercice 4 (5 points)

1) Pour tout nombre complexe z on pose :
$P(z) = z^3 - 4\sqrt{2}z^2 + 12z - 8\sqrt{2}$

a) Calculer $P(2\sqrt{2})$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a:

$$P(z) = (z - 2\sqrt{2})(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$, $z_B = 2\sqrt{2}$ et $z_C = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

b) Déterminer la nature du triangle ABC et celle du quadrilatère OABC

3) Pour tout nombre $z \neq \sqrt{2} - i\sqrt{2}$; on pose : $f(z) = \dfrac{z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

a) Vérifier que $f(z_B) = -i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = 2$.

e) Vérifier que les trois ensembles Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 passent par les points O et B.

Présentation et rédaction : 2 points

SUJET 3

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte.

	Proposition	A	B	C	D
1	**Si** $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **, alors le triangle *ABC* est :**	**isocèle et non rectangle**	**Equilatéral**	**rectangle et isocèle**	**rectangle et non isocèle**
2	**L'ensemble des points *M* d'affixe *z* tels que** $\left\|\frac{z-1-2i}{1+2i}\right\| = \sqrt{5}$ **est :**	**un cercle de rayon 5**	**la médiatrice d'un segment**	**une droite privée d'un point**	**un cercle privé de deux points**
3	**Si** $Z = \frac{1}{3}(1+i)e^{i\frac{\pi}{3}}$ **, alors** $\arg Z = ...$ **:**	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$
4	**Soit** $n \in \mathbb{N}^*$ **et** $\theta \in \mathbb{R}^*$**. La partie r éelle du nombre** $\left(e^{i\theta}\right)^n$ **est :**	$\cos\left(\theta^n\right)$	$\cos(n\theta)$	$\cos^n \theta$	$n\cos\theta$

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau suivant en choisissant la bonne réponse. <u>Justifier votre réponse.</u>

Question n°	1	2	3	4
Réponse				

Exercice 2 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$ **.**

2) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$ **.**

3.a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres

$u = 1 - i\sqrt{3}$ **,** $v = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ **et** $w = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}$ **.**

b) Ecrire w sous forme algébrique.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ **et** $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ **.**

4) Justifier les affirmations suivantes :

a) Le nombre $(w)^{2028}$ **est un réel négatif.**

b) Le nombre $(v)^{2026}$ **est imaginaire pur.**

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **définie par** $z_0 = i$ **et, pour tout entier *n*,** $z_{n+1} = \dfrac{1-i}{2} z_n$**. Pour *n* entier naturel, on appelle** M_n **le point d'affixe** z_n**.**

1)Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 **.**

2) Montrer que pour tout *n* entier naturel, $z_n = \dfrac{e^{-i\frac{n\pi}{4}}}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$ **.**

3) En déduire que la suite $V_n = |z_n|$ **est une suite géométrique . Donner son terme général et sa limite.**

4) Montrer que quel que soit *n* entier naturel, les triangles OM_nM_{n+1} **sont rectangles.**

Exercice 4 (7 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ **.**

Pour tout nombre complexe z **tel que** $z \neq 2+i$ **on pose :** $f(z) = \dfrac{z-3+i}{z-2-i}$**.**

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+i)$ **puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.**

2) Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{3-3i}{2-i}$

3) On considère les deux points A **et** B **d'affixes respectives** $z_A = 3-i$ **,** $z_B = 2+i$ **et.** $z_C = 2-i$

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Calculer le nombre $\beta = f(z_C)$**. En déduire la nature du triangle ABC.**

c) Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k **des points** M **du plan d'affixe** z **dans chacun des cas suivants :**

a) Γ_1 **tel que** $|f(z)| = 1$**.**

b) Γ_2 **tel que** $f(z)$ **soit imaginaire pur.**

c) Γ_3 **tel que** $f(z)$ **soit réel.**

d) Γ_4 **tel que** $|f(z)-1| = \sqrt{5}$**.**

4) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. Placer D.

SUJET 4

Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, six affirmations sont proposées. Pour chacune d'elles, répondre par VRAI ou FAUX. Justifier.
Soit z un nombre complexe non nul.

1. Si $\lvert z\rvert = 1$ **, alors** $z^2 = \left(\bar{z}\right)^2$ **.**	**4. Si** $\arg z = \pm\frac{\pi}{2}$ **, alors z est imaginaire pur.**
2. Si $z = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}$ **, alors** $\arg z = \pi + \frac{\pi}{3}$ **.**	**5. Si** $z = 5 + i(4-3i)$ **, alors la partie réelle de z est 5**
3. Si $z = 3(\sin\theta + i\cos\theta)$ **, alors** $z = 3e^{i\theta}$	**6. Si** $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ **;** $z_2 = -5\ e^{i\frac{\pi}{6}}$ **;** $z_3 = \sqrt{3}\ e^{-i\frac{\pi}{2}}$ **, alors le produit** $z_1z_2z_3$ **est réel négatif.**

Exercice 2 (4 points)

1) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres $u = 3 + 3i$ **et** $v = \sqrt{3} + i$ **.**

2) On pose $w = (3+3i)(\sqrt{3}+i)$ **. Ecrire w sous formes algébrique et trigonométrique.**

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ **et** $\sin\frac{5\pi}{12}$ **.**

Exercice 3 (4 points)

1) On pose $P(z) = z^3 + 2z^2 - 3z - 10$ **où z est un nombre complexe.**

a) Calculer $P(2)$ **.**

b) Déterminer α **et** β **tels que pour tout z de** $\mathbb{C}$ **on a:**
$P(z) = (z-2)(z^2 + \alpha z + \beta)$ **.**

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ **, l'équation :** $P(z) = 0$ **.**

2) On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Soient les points A , B et C d'affixes respectives : $z_1 = 2$, $z_2 = -2+i$ et $z_3 = -2-i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer D sur la figure.

3.a) Calculer le module du nombre $\frac{z_2}{z_3}$. En déduire la nature du triangle OBC .

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left|\frac{z-2}{z+2-i}\right| = 1$.

Exercice 4 (6 points)

On considère la suite (U_n) définie pour $n \in IN$ par

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{3U_n + 1} \end{cases}$$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) Montrer, par récurrence, que (U_n) est positive.

3)Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Que peut-on déduire ?

4) On pose $V_n = \frac{1}{U_n}$

a- Montrer que (V_n) est une suite arithmétique.

b- Exprimer V_n en fonction de n, en déduire U_n en fonction de n.

c- Calculer, en fonction de n, $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + ... + \frac{1}{U_n}$.

Présentation et rédaction : 2 points

SUJET 5

Exercice 1 (3 points)

Dans cet exercice, Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple.

Bonne réponse avec justification : 0,5 point ;

Bonne réponse sans justification : 0,25 point ;

Mauvaise réponse :- 0,25 point ;

Pas de réponse : 0 point.

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$, croissante et de termes strictement positifs .

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-1}{u_n}$.

a) Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors (v_n) est convergente.

b) Si (u_n) est divergente, alors (v_n) est divergente.

c) Si (u_n) est minorée par 5, alors (v_n) est minorée par −1.

d) La suite (v_n) est croissante et négative.

e) Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

f) Si (u_n) est géométrique, alors (v_n) est géométrique.

g) Si (u_n) est arithmétique, alors (v_n) est arithmétique.

h) La suite (u_n) est minorée.

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3+3i$ on pose :

$$f(z)=\frac{iz}{z-3-3i}.$$

1) Calculer le nombre $\alpha = f(\sqrt{3}+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) Résoudre l'équation $f(z)=\dfrac{1-2i}{1+2i}$.

3) Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)|=1$. b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur. c) Γ_3 tel que $|f(z)-i|=\sqrt{2}$.

Exercice 3 (6 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2+6z+25=0 \qquad (E)$$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\text{Im}(z_1)>0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = z_1 - 6i$, $z_B = z_2 + 4$ et $z_C = -1 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABDC$ soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 3$, on pose : $f(z) = \dfrac{z+3+2i}{z-3}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$.

4) Pour tout n, on pose $z_n = \alpha^n$ (où α est le nombre calculé à la question 3.a-) et soit M_n le point d'affixe z_n.

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

b) Que peut-on dire des points M_{2022} et M_{2024} ?

Exercice 4 (5 points)

1) La suite $\left(U_n\right)$ est définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$.

a) Calculer les termes U_1, U_2 et U_3.

b) Justifier que la suite $\left(U_n\right)$ n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2.a) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a $U_n \geq 0$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 4$, on a $U_n \geq n - 2$.

c) En déduire la limite de la suite $\left(U_n\right)$.

3) On définit la suite $\left(V_n\right)$ par $V_n = 4U_n - 8n + 24$.

a) Démontrer que $\left(V_n\right)$ est une suite géométrique décroissante dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$.

c) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_n = x_n + y_n$ où $\left(x_n\right)$ est une suite géométrique et $\left(y_n\right)$ une suite arithmétique dont on précisera pour chacune le premier terme et la raison.

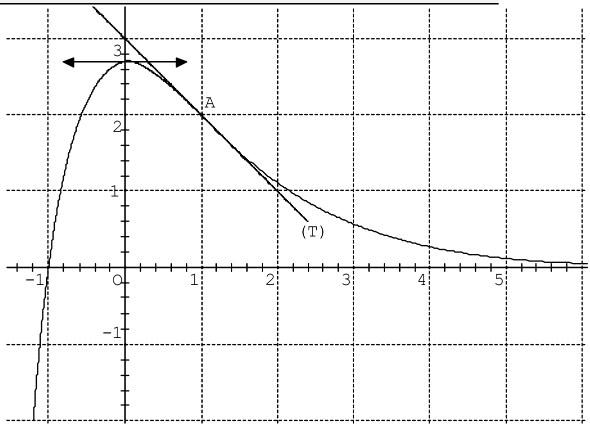
d) En déduire l'expression de la somme $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$ en fonction de n.

Répsentation et rédaction : 2 points

SUJET 6

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées. Une et une seule est exacte. On demande de l'entourer.



Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite d'équation $y = e$ est tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0. La droite T est tangente à la courbe (C) au point A d'abscisse 1. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

D'après la courbe (C) :

	A	B	C
$f(1) =$	1	2	0
$f'(-1)$	$=0$	< 0	> 0
$f''(3)$	$=0$	< 0	> 0
$f'(1) = ...$	0	1	-1
On a	$f(0) = 0$	$f'(0) = e$	$f'(0) = 0$
On a	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 6} f(x) = 0$
Sur l'intervalle $]0,4[$, la fonction f est	Strictement croissante	Strictement décroissante	Non monotone

L'équation f(x)=2 admet exactement dans $]-1,5[$	Une solution	Deux solutions	Trois solutions

Exercice 2 (5 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$: $u_{n+1} = \dfrac{3n}{n+1}u_n + \dfrac{4}{n+1}$

1.a) Vérifier que $u_2 = \dfrac{7}{2}$ et $u_3 = \dfrac{25}{3}$.

b) Justifier que la suite (u_n) n'est in arithmétique, ni géométrique.

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$

d) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = nu_n + 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = \dfrac{3^n - 2}{n}$.

3) Soit $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + ... + nu_n$.

A l'aide de v_n, exprimer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 3 (6 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4iz^2 + (-2+4i)z + 8 - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z)=(z-2i)(z^2+az+b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=(1+i)^2$, $z_B=\frac{7+i}{3+4i}$ et $z_C=\frac{1+7i}{2-i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z\neq -1+3i$ par $f(z)=\frac{(1+i)z-2}{z+1-3i}$

Montrer que pour tout $z\neq -1+3i$, on a : $f(z)=(1+i)\frac{z-1+i}{z+1-3i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)|=\sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z))=\frac{\pi}{4}\ [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z))=\frac{3\pi}{4}\ [\pi]$,

d. Γ_4 tel que $|f(z)-1-i|=2\sqrt{10}$

6.a) Calculer le nombre $\alpha=f(2)$ et l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique

b) Montrer que le nombre α^{2024} est réel.

Exercice 5 (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier $n \geq 0$ on a

$$u_{n+1} = \frac{n}{2n+2}u_n - \frac{1}{n+1}$$

1.a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$

d) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n + 2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$.

3) On définit la suite (w_n) par $w_n = nu_n$ et soit

$S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$

a) Donner l'expression de w_n à l'aide de v_n

b) Calculer la somme $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

c) Déduire la valeur de S_n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

SUJET 7

Exercice 1 (4 points)

Soit f une fonction numérique dérivable sur $\mathbb{R}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$..

Compléter les propositions suivantes:

1) **Si $f(1)=2$ et $f'(1)=4$, alors une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y=...$**
2) **Si le point $A(5,3)$ est un centre de symétrie de C, alors on pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(10-x)=...$**
3) **Si f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J avec $f(3)=0$ et $f'(3)=4$, alors $(f^{-1})'(0)=......$**
4) **Si f est strictement décroissante sur l'intervalle $I=[a,b]$, alors l'image de I par f est l'intervalle $J=...$**
5) **Pour trouver les points de C où la tangente est perpendiculaire à la droite d'équation $y=ax+b$ où $a\neq 0$, on résout l'équation $f'(x)=...$**
6) **Si g est une fonction définie par $g(x)=f(\sin x)$, alors la dérivée de g est $g'(x)=...$**

Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante : $z^2+6z+25=0$ $\quad(E)$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\mathrm{Im}(z_1)>0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A=z_1-6i$, $z_B=z_2+4$ et $z_C=-1+2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z\neq 3$, on pose : $f(z)=\dfrac{z+3+2i}{z-3}$.

a) Calculer le nombre $\alpha=f(5-6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)|=1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$.

Exercice 3 (5 points)

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies pour tout n de IN^* par:

$$\begin{cases} U_1 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} U_n \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n} U_n .$$

1.a) Calculer U_2 ,. V_1, V_2, U_3

b) Vérifier que $U_4 = \frac{4}{9}$.

2.a) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est positive.

b) Montrer que (U_n) est décroissante. Que peut-on déduire ?

3.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Recalculer alors U_2 et U_3.

4.a) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$.

b) Soit $P_n = V_1 \times V_2 \times V_3 \times \ldots \times V_n$. Montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n-3)}{2}}$

c) Soit $Q_n = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_n$. Calculer Q_n en fonction de n.

Exercice 4 (7 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose :

$$P(z) = z^3 - (2+6i)z^2 - 11z - 8 + 6i$$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z = 32i$.

b) Calculer $P(2i)$.

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:
$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

d) Résoudre, l'équation $(E) : P(z) = 0$.

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
$z_A = -1;\ \ z_B = 2i$ **et** $z_C = 3 + 4i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\dfrac{z - 2 - 2i}{z - 2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = (z_D)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n.

a) Ecrire z_n sous forme exponentielle. Montrer que le nombre z_{2020} est réel.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n \geq 2025$.

4) Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b)On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + ... + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

SUJET 8

Exercice 1 (3 points)

L'Exercice comporte 3 questions. Pour chaque question, on propose 3 affirmations. Pour chacune d'elles, l'élève doit indiquer si elle est vraie ou fausse en cochant la case correspondante.

Aucune justification n'est demandée.

Q1	**Pour tout n entier naturel non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à :**	$e^{in\theta}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos\left(\theta^n\right)+i\sin\left(\theta^n\right)$	☐Faux ☐ Vrai
		$\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$	☐Faux ☐ Vrai
Q2	**La partie imaginaire du nombre z est égale à :**	$\frac{z+\overline{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2i}$	☐Faux ☐ Vrai
		$\frac{z-\overline{z}}{2}$	☐Faux ☐ Vrai
Q3	**Soit *z* un nombre complexe tel que $z=x+iy$ (x et y réels). Si *z* est un imaginaire pur, alors $\lvert z\rvert^2$ est égal à :**	y^2	☐Faux ☐ Vrai
		$-y^2$	☐Faux ☐ Vrai
		$-z^2$	☐Faux ☐ Vrai

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -2-4i$ on pose :

$$f(z) = \frac{z+2-i}{z+2+4i}.$$

1) Calculer le nombre $z_0 = f(-2-3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\quad f(z) = 2z+6i$.

3) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = -2-4i$ et. $z_B = -2+i$

Placer A et B. Calculer $\frac{z_A}{z_B}$ puis interpréter géométriquement.

4) Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

b) Γ_2 tel que $\arg f(z) = \pm\frac{\pi}{2}$.

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

d) Γ_4 tel que $|f(z)-1| = 5$.

Exercice 3 (3 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$U_0 = 3, \quad U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N} ;$$

1) Calculer U_1 ,. U_2

2) Soit (V_n) la suite numérique définie par $V_n = U_n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique, exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Exercice 4 (3 points)

Une compagnie aérienne vend des billets d'avion d'une ville A vers une ville B à 580 \$. La compagnie propose une remise sur les prix selon les conditions suivantes : si le nombre de passagers atteint 200 alors toute augmentation de cinq nouveaux passagers entraîne une remise de 10 \$ sur tous les billets. La capacité de l'avion est de 300 places. Quel est le nombre de passagers pour lequel la recette de la compagnie est maximale ?
Quel est alors le montant de cette recette ?

Exercice 5 (7 points)

Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

a) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

b) Montrer qu'il existe un réel α unique tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $2 \le \alpha \le 3$ puis déterminer une valeur approchée de α à 5.10^{-1} près.

c) Etudier le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.

2) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition : $\pm\infty, -1^-, -1^+, 1^-, 1^+$.

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le tableau de variation de f.

4) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{-1, +1\}$, $f(x) = x + 2 + \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$. En déduire que C admet une asymptote oblique D. Etudier la position de C par rapport à D.

5) Déterminer les abscisses des points de *C* où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x + 2$

6) Tracer la droite *D*, les tangentes du 4. ainsi que la courbe *C* .

7) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [3, +\infty[$.

a) Montrer que $h : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

c) Calculer $(h^{-1})'(\dfrac{45}{8})$.

SUJET 9

Exercice 1 (5 points)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ de tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+	||	-	0	+	
f	-2	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

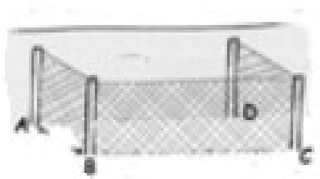
A- Choisir la bonne réponse : (la justification n'est pas demandée)

Proposition	A	B	C
Le domaine de définition de f est:	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\mathbb{R} \setminus \{1,3\}$	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$
La fonction f est	**paire**	**impaire**	**Ni paire ni impaire**
La courbe C admet une asymptote d'équation	$x = 3$	$x = 1$	$y = 3x - 2$
La courbe C admet une asymptote d'équation	$y = -2$	$y = 1$	$x = -2$
Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 3 est :	$y = -2$	$y = 3x - 2$	$x = -2$
$\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} =$	$-\infty$	$+\infty$	0
L'équation $f(x) = 0$ admet exactement	**3 solutions**	**2 solutions**	**1 solution**
Si $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors C admet une branche infinie vers	(Oy)	(Ox)	$y = 2x$

B- Sachant que $f(0)=1$ **et** $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=2$ ou $x=4$.

et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$ **; tracer un allure de la courbe C.**

Exercice 2 (3 points)



Un éleveur a trouvé 100 m de grillage pour construire un enclos rectangulaire pour ses moutons. Afin d'obtenir un enclos plus grand, il a utilisé le mur du jardin qui formerait un côté, le grillage formant les trois autres côtés. Après avoir placé un premier piquet en A collé au mur, il cherche l'emplacement du second piquet (appelé B sur le croquis) pour obtenir une aire maximale du rectangle ABCD.

On pose AB=x et on note f(x) l'aire du rectangle ABCD en fonction de x.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Trouver l'expression de f(x).

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) Préciser l'emplacement du second piquet pour obtenir une aire maximale du rectangle ABCD.

Exercice 3 (3 points)

Soit (u_n) **la suite définie par :** $u_1=\dfrac{1}{2}$ **et pour tout n de** $\mathbb{N}^*$ **on a :**

$$u_{n+1}=\frac{n+1}{2n}u_n+\frac{n-1}{2n}$$

1)Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.

2) On définit la suite (v_n) **pour tout entier** $n \geq 1$ **par :** $v_n=\dfrac{u_n-1}{n}$ **.**

a)Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, puis calculer $\lim v_n$.

Exercice 4 (3 points)

On considère les nombres $z_1 = \dfrac{3+i}{1+2i}$, $z_2 = \dfrac{3-i}{1-i}$ et $z_3 = (1+i)^2$.

1) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique. Et z_1 sous forme trigonométrique.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3) Soit f l'application définie pour tout $z \neq 2i$ par :

$$f(z) = \frac{(1+i)z-2}{z-2i}$$

a)Montrer que pour tout $z \neq 2i$, on a : $f(z) = (1+i)\dfrac{z-1+i}{z-2i}$.

b) Déterminer et représenter, dans le même repère, les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

i) Γ_1 tel que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

ii) Γ_2 tel que $Arg(f(z)) = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

iii) Γ_3 tel que $Arg(f(z)) = -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$.

Exercice 5 (6 points)

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-x-1}{x-2}$ **et soit** ***C*** **sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$**.**

1) Déterminer $\mathrm{D_f}$ **l'ensemble de définition de** ***f*** **, puis déterminer les réels** ***a, b*** **et** ***c*** **tels que pour tout x de** $\mathrm{D_f}$ **,** $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$

2) Calculer la dérivée f' **de** f **et dresser son tableau de variations.**

4) Donner une équation de la tangente de C **à son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.**

5) Résoudre l'équation $f(x)=0$ **et interpréter graphiquement ses solutions.**

6.a) Montrer que C **admet deux asymptotes l'une oblique D.**

b) Etudier les positions relatives de D par rapport à C**.**

7) Vérifier que $f(4-x)+f(x)=6$ **puis l'interpréter graphiquement.**

8) Tracer C **avec ses asymptotes.**

9) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $x^2-(1+m)x-1+2m=0$**.**

10) Soit g **la restriction de f sur l'intervalle** $I=\left]-\infty,1\right]$**.**

a) Démontrer que g **réalise une bijection de** ***I*** **sur un intervalle** J **que l'on précisera.**

b) Calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\dfrac{1}{2}\right)$**.**

c) Construire dans un nouveau repère orthonormé les courbes de g **et de** g^{-1}**.**

DEUXIEME TRIMRSTRE

SUJET 10

Exercice 1 (3 points)

Pour chaque question, quatre réponses sont proposées. Une et une seule est exacte. Choisir la bonne réponse.

1) Une primitive de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $F(x)=...$

A. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$	B. $\frac{\sqrt{x}}{x}$
C. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$	D. $2x^{\frac{3}{2}}$

2) Une primitive de la fonction $f(x)=x\sin x$ sur $\mathbb{R}$ est …

A. $-x\cos x+\sin x$	B. $\frac{1}{2}x^2\cos x$
C. $x\cos x$	D. $\frac{1}{2}x^2+\cos x$

3) La valeur moyenne de la fonction $f(x)=\cos x$ sur $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ est

A.	$\frac{\sqrt{2}-1}{12\pi}$	B.	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6\pi}$
C.	$\frac{6\sqrt{3}-6\sqrt{2}}{\pi}$	D.	$\frac{12-12\sqrt{2}}{\pi}$

4) Soit f une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$ et paire. Soit $I=\int_{-5}^{5}f(x)dx$:

A. $I\le 0$ **B.** $I=0$ **C.** $I=2\int_{0}^{-5}f(x)dx$ **D.** $I=2\int_{0}^{5}f(x)dx$

5) Soit $I=\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

A. $I=\frac{7}{3}$ **B.** $I=\frac{5}{3}$ **C.** $I=\frac{2\sqrt{2}+1}{3}$ **D.** $I=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$

6) L'aire du domaine plan limité par la courbe de la fonction $f(x)=\cos^2 x$ **et la droite d'équation** $y=3$ **, et les droites verticales d'équations** $x=0$ **et** $x=\pi$ **est calculée par :**

A. $\int_0^{\pi}(3-\cos^2 x)dx$	**B.** $3-\int_0^{\pi}\cos^2 x dx$
C. $\int_0^{\pi}(\cos^2 x-3)dx$	**D.** $3\int_0^{\pi}\cos^2 x dx$

Exercice 2 (3 points)

On pose $I=\int_0^{\pi} x\cos^2 x dx$ **et** $J=\int_0^{\pi} x\sin^2 x dx$ **.**

1) Calculer $I+J$ **.**

2) En utilisant une integration par parties, calculer $I-J$ **,**

(On rappelle que pour tout réel x : $\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ **)**

3) En déduire I et J.

Exercice 3 (5 points)

1) Soit $P(z)=z^3-7z^2+19z-13$**, où** z **est un nombre complexe**

a) Calculer $P(1)$ **et déterminer deux réels a et b tels que** $P(z)=(z-1)(z^2+az+b)$ **pour tout z de** $\mathbb{C}$ **.**

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ **l'équation** $P(z)=0$ **.**

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=1$**,** $z_B=\frac{7-4i}{1-2i}$ **et** $z_C=\frac{1-5i}{1-i}$ **.**

a) Donner la forme algébrique de z_B et z_C
b) Placer les points A, B et C
c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

3) Pour tout complexe $z \neq 3-2i$ on pose $f(z)=\frac{z-3-2i}{z-3+2i}$

a) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tels que $|f(z)|=1$; Γ_2 tel que $\arg(f(z))=\frac{-\pi}{2}$; Γ_3 tel que $|f(z)-1|=2$

b) Calculer le nombre $\alpha=f(7-2i)$ et l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique
c) Donner la forme exponentielle de α^{2024}.

Exercice 4 (9 points)

Soit f la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x^2+3x+3}{2x+2}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.

1.a) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de ce domaine.

b) Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation

2.a) Déterminer les réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+2}$

b) En déduire que (C) admet une asymptote oblique Δ, dont on donnera l'équation.

c) Etudier la position relative entre (C) et Δ

3.a) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

b) Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Déterminer $g^{-1}\left(\frac{7}{4}\right)$ et $\left(g^{-1}\right)'\left(\frac{7}{4}\right)$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α que l'on déterminera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près.

d) Tracer, dans le même repère, la courbe (C') de la fonction g^{-1} .

5) On considère l'intervalle $K = [2;3]$

a) Montrer que, $x \in K$ implique que $\forall x \in K$, $f(x) \in K$

b) Montrer que $\forall x \in K$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

6) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$

d) En déduire la limite de (u_n).

SUJET 11

Exercice 1 (3 points)

Soit a et b deux réels strictement positifs ; n un réel. Pour chacune des propositions suivantes, une seule des réponses proposées est correcte. Choisir la bonne réponse.

	A	B	C
$\ln(ab) =$	$\ln a \times \ln b$	$\ln a + \ln b$	$\ln(a+b)$
$\ln\frac{a}{b} =$	$\ln a - \ln b$	$\frac{\ln a}{\ln b}$	$\ln(a-b)$
$\ln(\frac{1}{b}) =$	$-\ln b$	$\frac{1}{\ln b}$	$-\frac{1}{\ln b}$
$\ln\sqrt{a} =$	$\sqrt{\ln a}$	$\frac{\ln a}{2}$	$\ln(\frac{a}{2})$
$\ln(a^n) =$	$(\ln a)^n$	$a\ln n$	$n\ln a$
$\ln a = b \Rightarrow$	$a = e^b$	$b = e^a$	$b = \ln a$

Exercice 2 (4 points)

Soit la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)U_n$$

1.a) Calculer u_1 et u_2

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \frac{2n+5}{2n+3} \leq \frac{5}{3}$. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{5}{6}U_n$

c) Prouver alors que $\forall n \in \mathbb{N},\quad U_n \leq 3\left(\frac{5}{6}\right)^n$ et calculer $\lim u_n$.

2) Pour tout entier naturel n on pose : $v_n = \frac{u_n}{2n+3}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_0 et exprimer v_n puis u_n en fonction de n .

c) Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $v_n \le 10^{-10}$.

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère le polynôme:
$P(z) = z^3 - (5+7i)z^2 + (-6+26i)z + 24 - 24i$

1.a) Calculer P(2) .

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout nombre z : $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

c) Déterminer les racines carrées de : $8-6i$

d) Déterminer les solutions z_0 , z_1 et z_2 de l' équation P(z)=0 avec $|z_0| \le |z_1| \le |z_2|$.

2) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $4i$, 2 et $3+3i$.
On pose : $f(z) = \frac{z-2}{z-4i}$

a) Placer les points A ,B et C .

b) Calculer $f(z_C)$ et interpréter le résultat

c) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

d) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|f(z)-1|=2$

Exercice 4 (8 points)

Partie A

Soit la fonction numérique définie par $g(x)=x^3-3x-6$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer que l'équation g(x)= 0 admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$ et que $2<\alpha<2,5$.

3) Donner le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^2-1}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Montrer que $\forall x\in D_f,\ f(x)=x+2+\dfrac{x+3}{x^2-1}$

b) En déduire que la courbe (C) admet une asymptote oblique Δ à préciser puis étudier la position relative de (C) et Δ.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur D_f (On pourra utiliser A.3).

4.a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Justifier que l'équation f(x)= 0 admet une unique solution β dans $\mathbb{R}$ et que $-2{,}5 < \beta < -2$.

5) Donner une équation de la tangente de (C) en $x_0 = 3$

6.a) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes

b) Construire la courbe (C)

7) Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [3;+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $\left(h^{-1}\right)'\left(\dfrac{23}{4}\right)$.

c) Tracer la courbe de h dans le repère précédent.

8.a) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in D_f,\ f(x) = x + 2 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

b) En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $I = [3;+\infty[$.

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 3$ et $x = 4$.

SUJET 12

Exercice 1 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x+1).$$

1.a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$

b) En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $\ln(x+1) \le x$.

2) On pose $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n - \ln(U_n + 1)$

On admet que la suite de terme général U_n est bien définie.

a) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de U_1 et U_2.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \ge 0$.

c) Démontrer que la suite (U_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $U_n \le 1$.

3.a) Montrer que la suite (U_n) est convergente.

b) On note ℓ la limite de la suite (U_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$. Calculer ℓ.

Exercice 2 (4 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = 3 - \dfrac{2n}{3(n+1)}(3 - U_n), \ \forall n \in IN^* \end{cases}$$

1) Vérifier que $U_2 = \dfrac{7}{3}$ puis calculer. U_4 ; U_3

2) On admet que la suite (U_n) est majorée par 3 (a démontrer facilement par récurrence).

a) Montrer que pour tout n de IN^* on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n+3}{3(n+1)}(3 - U_n).$$

b) Déduire le sens de variation de la suite (U_n). Puis que la suite (U_n) est convergente.

3) On pose pour tout n de IN^* : $V_n = n(3 - U_n)$.

a) Calculer $V_1 ; V_2$ et montrer que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison.

b) exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Montrer que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite. En déduire la limite de (U_n).

d) Calculer par une deuxième méthode la limite de (U_n).

4) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = U_1 + 2U_2 + 3U_3 + \cdots + nU_n.$$

Exercice 3 (5 points)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ on pose : $P(z) = \dfrac{z-1+6i}{z+4-i}$.

1) Calculer puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants : $P(-1)$; $P(3+6i)$; $P(-4+3i)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 1 - i$; écrire la solution sous forme algébrique .

3) On pose $Z = P(3+6i)$. On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit M_1 ;les points d'affixes M_n respectives Z et Z^n ; $n \in IN^*$.

a) Montrer que $Z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

b) Ecrire Z^n sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et représenter dans le plan les points M_1 ; M_2 ; M_3.

4) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1.

5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe Ox?

b) Montrer que les points O ; M_{2024} ; M_4 sont alignés.

c) c) Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $OM_n \geq 2024$.

Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction de variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} .$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer les réels a ;b et c tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}, \quad \forall x \in D_f$$

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Montrer que C admet deux asymptotes D et D' dont l'une D est oblique.

Etudier les positions relatives de D et (C)

4.a) Donner une équation de la tangente T à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Existe-t-il des points de (C) où la tangente est perpendiculaire à l'asymptote oblique D ? Si oui, donner des équations de ces tangentes.

5) Vérifier que pour tout x de D_f on a $f(4-x)+f(x)=2$ et interpréter graphiquement.

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]0;2[$.

a) Montrer que $g : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Calculer $(g^{-1})'(-4)$. Donner, par deux méthodes différentes l'équation de la droite T' tangente à (C') courbe de g^{-1} au point d'abscisse $x_0 = -4$.

7.a) Tracer les courbes (C) et (C').

b) Calculer en centimètre carré l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , son asymptote oblique D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

c) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $x^2 - (3+m)x + 6 + 2m = 0$. Retrouver ces résultats algébriquement.

8.a) Trouver une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$

b) Calculer en centimetre carré l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'asymptote D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

SUJET 13

Exercice 1 (3 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x\ln x \quad \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point $x_0 = 0$.

2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpreter graphiquement.

4) Trouver une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.

5) Tracer T et C.

Exercice 2 (4 points)

1) Trouver les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de chacun des nombres complexes $u = 21 - 220i, \quad v = 8 - 6i, \quad w = -3 + 4i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (5-2i)z + 50i = 0$

3) En déduire les solutions de l'équation $z^4 - (5-2i)z^2 + 50i = 0$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = e^3$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = e\sqrt{U_n}$

1) Montrer par récurrence que (U_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n, $e^2 \leq U_n$

2) En déduire que (U_n) converge. Quelle est sa limite ?

3) Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \ln U_n - 2$

a) Exprimer U_n en fonction de V_n pour tout entier naturel n.

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) En déduire l'expression de V_n puis celle de U_n en fonction de n.

d) Retrouver la limite de la suite (U_n) à l'aide de cette expression.

Exercice 4 (8 points)

Soit f la fonction de variable réelle définie par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f puis déterminer les réels a et b tels que pour tout x de D_f : $f(x) = a + \dfrac{b}{(x+1)^2}$.

2) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Montrer que C admet deux asymptotes D et D' dont l'une D est verticale.

b) Montrer que l'asymptote verticale D est un axe de symétrie de C.

4.a) Compléter le tableau des valeurs :

x	0	1	2	3	4
f (x)					

b) Montrer que l'équation f(x)=x admet trios solutions distincts x_1, x_2, x_3 que l'on déterminera.

5) Tracer les droites D, D' et la droite Δ d'équation $y = x$. Puis tracer la courbe (C).

6) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

a) Montrer que $g : I \to J$ réalise une bijection où J est un intervalle que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variations de g^{-1}.

c) Calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{4})$.

7.a) Montrer que f admet des primitives sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

b) On considère A_n l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), son asymptote D' et les droites d'équations $x = n$ et $x = n + 1$ où n est un entier naturel non nul.

Calculer A_1, A_2, A_3 et donner l'expression de A_n en fonction de n.

c) Calculer en fonction de n la somme : $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ puis calculer $\lim_{n\to\infty} S_n$.

SUJET 14

Exercice 1 (3 points)

Pour chaque question ci-après ; une réponse au moins est exacte.

Choisir les bonnes réponses.

	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	La suite de terme général $\left(\frac{e}{2}\right)^n$ est :	divergente	croissante	géométrique
2	(V_n) est une suite Arithmétique de raison r et de valeurs positives alors la suite $U_n = e^{V_n}$ est :	géométrique	arithmétique	divergente
3	$S = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2024}$ alors S=…	$1 - 2^{2024}$	$2^{2025} - 1$	$2^{2024} - 1$
4	(U_n) est une suite arithmétique telle que $U_0 = 13$ et de raison r $U_0 + U_1 + \ldots + U_n = -2867$ Alors:	$\begin{cases} n = 40 \\ r = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 60 \\ r = 2 \end{cases}$	$\begin{cases} n = 60 \\ r = -2 \end{cases}$
5	Toute suite positive strictement décroissante est	convergente	majorée	minorée
6	Si (W_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ telle que ; $\frac{n + \sin n}{n} \le W_n \le 1 + \frac{e}{n}$ alors :	$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$	$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$	$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

Exercice 2 (3 points)

La vitesse (mètre par seconde) d'un mobile en fonction du temps t est donnée par l'équation suivante : $v(t)=3t^2+5t+1$.

1) Trouver la fonction qui permet d'évaluer l'accélération du mobile.

2) De combien de mètres s'est-il déplacé entre 1 s et 5 s ?

Exercice 3 (4 points)

Pour tout nombre complexe z on note : $P(z)=z^3-z^2+2$.

1.a) Calculer P(-1).

b) Déterminer les réels a et b tels que : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$

c) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $P(z)=0$.

On note $z; z'$ *et* z'' les solutions avec $\operatorname{Im}(z'')\leq\operatorname{Im}(z')\leq\operatorname{Im}(z)$.Ecrire les nombres z, z', z'' sous forme trigonométrique

2) Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u};\vec{v})$.

Soient les points A ;B ;C et D d'affixes respectives :

$z_A=z'+2+i; z_B=-z''; z_C=-z'$ et $z_D=3$.

a) Placer les points A ;B ;C et D dans le repère

b) Comparer l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ a celle de $\overrightarrow{DC}$. En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|z-3|=|z+1-i|$

3) Pour tout entier naturel n on note $z_n=(z_A+1+i)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels z_n est réel.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a : $OM_n\geq 2025$.

Exercice 4 (4 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis déterminer le sens de variations de g.

2) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$.

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.a) Montrer quel $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) Vérifier que : $\forall x \neq 0, \quad \dfrac{f(x)}{x} = (\dfrac{e^{2x}}{x} - 2)\dfrac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$

c) En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Interpréter graphiquement.

2.a) Justifier que $\forall x > 0, \quad 1 - \dfrac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que

$\forall x > 0, \quad f(x) = 2x + \ln\left(1 - \dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$.

b) En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C).

d) Etudier les positions relatives de (C) et (D).

3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4) Tracer (D) et (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

Exercice 5 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x\ln x - x - 1;\ x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Etudier la continuité de f à droite de 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0. Interpréter graphiquement.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Montrer que la courbe (C) de f admet au point d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{e}}$ une tangente horizontale.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3)a) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans $[0\,;\,+\infty[$ une unique solution $\propto$et que $2 <\propto< 2.1$.

b) Tracer la courbe (C).

4) On considère la fonction g définie par $g(x) = x^2 lnx$.

a) Vérifier que pour tout $x > 0$, g'(x)= f(x) +2x+1.

b) En déduire la primitive F de f sur $]0\,;\,+\infty[$ telle que F(1)=0.

5) Pour tout $n \geq 1$. On pose : $U_n = \int_1^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$.

a) InterpréterU_n graphiquement et démontrer que la suite (U_n) est croissante.

b) Exprimer U_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

SUJET 15

Exercice 1 (3 points)

Pour tout entier naturel n on pose :

$U_n = 2^{2n+1} + 4n - 6$ **et** $V_n = 2^{2n+1} - 2n + 3$

$a_n = U_n - V_n$ **et** $b_n = U_n + 2V_n$.

1.a) Calculer a_0, a_1 , b_0 **et** b_1 .

b) Montrer que (a_n) **est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison**

c) Montrer que (b_n) **est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison**

2) On pose pour tout entier naturel n : $c_n = \ln b_n$.

a) Déterminer la nature de la suite (c_n) **et la caractériser .**

b) Soit $S_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_n$ **. Vérifier que** S_n **peut s' écrire sous la forme** $S_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$ **où** α, β **et** γ **sont des réels à déterminer.**

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = e^{-x} + 2x + 1$ **.**

(C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ **.(l'unité 2cm)**

1) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **et** $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - (2x+1)\right)$ **interpréter graphiquement**

b) Montrer que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ **et** $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ **interpréter graphiquement**

2) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe .

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Représenter la courbe (c) de f .

b) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan limitée par (C) ,son asymptote oblique et les deux droites d'équation x=0 et x=1.

4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = lnf(x)$

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Dresser le tableau de variation de g.

5) On définie les suites (U_n) et (V_n) pour tout entier naturel n par : $U_n = e^{-2n}$ et $V_n = 4n + 1$.

a) Montrer que la suite (U_n) est géométrique décroissante.

b) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique croissante.

c) Les suites (U_n) et (V_n) sont-elles adjacentes. Justifier votre réponse

6) Pour tout entier naturel n on pose :

$S_n = f(0) + f(2) + f(4) + \ldots + f(2n)$.

a) Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2}$.

Exercice 3 (5 points)

Dans l' ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose :

$$P(z) = z^3 - (5+6i)z^2 + (-4+14i)z + 8 - 8i$$

1.a) Calculer P(1)

b) Déterminer les complexes a et b tel que :

$$P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$$

c) Résoudre l'équation P(z)=0

2) Dans le plan complexe muni d' un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ on considère les quatre points A,B , C et D tels que : $Z_A = 2i$, $Z_B = 1$, $Z_C = 4 + 4i$ et D le quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

a) Déterminer Z_D et placer les points A, B , C et D

b) Calculer $\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}$ et interpréter ce résultat.

3) Pour tout nombre $z \neq 1$, on pose : $f(z)=\frac{Z-4-4i}{Z-1}$

a) Déterminer est construire l' ensemble Γ_1 des points M(z) tels que : $|f(z)| = 1$

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M(z) tels que : $|f(z) - 1|=5$

4)Soient les points M_n d' affixes $Z_n = (Z_C)^n$;(n≥1

a) Pour quelles valeurs de n les points M_n sont situés sur l'axe (Ox) ?

b) Déterminer n pour que $OM_n > 2025$.

Exercice 4 (8 points)

Partie A

On considère la fonction g définie par :

$$\forall\ x>o\ ,\quad g(x)=x^4+2\ -\ 4\ln x\ .$$

1) Calculer $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2.a) Calculer g'(x).

b) Dresser le tableau de variations de g .

3) En déduire que ∀ x >0 , g(x) > 0 .

Partie B

Soit la fonction f définie par : $\forall$ x > 0 ; $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{2\ln x}{x^2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i},\vec{j}$) d'unité 2 cm.

1.a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

2.a) Montrer que $\forall$ x>0 ; $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

3.a) Montrer que f réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que l' équation f(x) = 0 admet une unique solution $\propto$ dans $]0;\ +\infty[$ et vérifier que $0{,}8 < \propto < 0{,}9$

c) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C)au point d'abscisse x_0 =1.

4.a) Dresser le tableau de variations de f^{-1}.

b) Calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

c) Déterminer l'équation de la tangente (T') à la courbe (C') représentative de f^{-1} au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

d) Tracer dans le même repère (T), (T'), (C) et (C') .

5. a)En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1=\int_1^2\frac{\ln x}{x^2}dx$.

b) En déduire l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

TROISIEME TRIMESTRE

SUJET 16

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (3 points)

Pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte. Cocher la bonne réponse.

La durée de vie t , exprimée en année, d'un appareil éléctrique avant la première panne est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , et μ son espérance.

N°	Question	A	B	C
1	$p([t,+\infty[) =$	$1+e^{-\lambda t}$	$1-e^{-\lambda t}$	$e^{-\lambda t}$
2	Si $p([t,+\infty[) = p([0,t[)$ alots t=…	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda}{\ln 2}$	$\frac{\ln 2}{\lambda}$
3	La probabilité que l'appareil tombe en panne après la fin de la troisième année est	$e^{-3\lambda}$	$e^{-4\lambda}$	$1-e^{-4\lambda}$
4	$p(T \geq \mu) = ...$	e^{-1}	$e^{-\lambda^2}$	$1-e^{-\lambda}$
5	Sachant que la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18 ; on a $\lambda = ...$	$\ln(0,82)$	$-\ln(0,82)$	$\frac{\ln 82}{\ln 100}$
6	Sachant que l'appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :	$p(T \geq 1)$	$p(T \geq 2)$	$p(T \geq 3)$

Exercice 2 (3 points)

On se propose de trouver la solution de l'équation différentielle

(E) : $y'+2y=4$, qui vérifie $y(1)=5$.

1) Trouver la solution générale de l'équation homogène $y'+2y=0$.

2) Vérifier que la fonction $y(x)=2$ est une solution de (E).

3) Trouver la solution générale de l'équation (E).

4) Trouver la solution de l'équation (E) qui vérifie $y(1)=5$

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2-2z+5=0$ et $z^2-6z+10=0$

2) Pour tout nombre complexe z tel que $z\neq 1+2i$ on pose :

$$f(z)=\frac{z-3-i}{z-1-2i}.$$

a) Calculer le nombre $\alpha=f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

b) On considère les deux points A et B d'affixes respectives

$z_A = 1+2i$ et. $z_B = 3+i$

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k

des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel.

Γ_4 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{5}$.

4) Déterminer et représenter dans le repère précédent le point C tel que le quadrilatère OABC soit un parallélogramme.

Exercice 4 (3 points)

Les chimistes définissent l'acidité ou l'alcalinité d'une solution selon la formule $pH = -\log\left[H^+\right]$ où H^+ est la concentration des ions d'hydrogène, mesurée en moles par litre. Une solution est acide si sa valeur en pH est inférieure à 7, basique si sa valeur en pH est supérieure à 7. Les solutions ayant une valeur en pH égale à 7 sont des solutions neutres.

1) Le jus de pomme a une concentration des ions d'hydrogènes de $H^{+} = 0,0003$ *mol/l* Calculer sa valeur en pH et déterminer si ce jus est acide ou basique.

2) Un test d'ammoniac montre que la concentration des ions d'hydrogène est de $H^{+} = 13\times10^{-10}$ *mol/l* . Trouver sa valeur en pH et déterminer si l'ammoniac est acide ou basique.

3) La solution A ayant un pH de 10 est 100 fois plus basique que la solution B. Trouver la valeur en pH de la solution B.

4) La solution B est 10 fois plus basique qu'une autre solution C. Trouver la valeur en pH de la solution C et déterminer si elle est acide, basique ou neutre.

Exercice 5 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = x - 3 - \dfrac{\ln x}{x}$. On note (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm.

1) Démontrer chacun des résultats suivants et en donner une interprétation géométrique :

a) $\lim\limits_{x\to0^{+}} f(x) = +\infty$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - (x-3) \right) = 0$.

2.a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}.$$

b) Vérifier que : $\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow \quad f'(x) \leq 0 \end{cases}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ exactement deux solutions α et β. Vérifier que : $0,37 < \alpha < 0,38$ et $3,36 < \beta < 3,37$.

b) Déterminer un point de (C) où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x$ et déterminer une équation de cette tangente.

c) Construire la courbe (C).

d) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\ln x = mx$ où m est un paramètre réel.

SUJET 17

Exercice 1 (3 points)

Dans une ville où la propreté des trottoirs est souvent critiquée, la municipalité décide de trouver la proportion p de foyer qui ont au moins un conteneur-poubelle métalique. Elle organise donc un sondage auprès de 500 foyers. Elle apprend que 85 foyers de cet échantillon sont propriétaires d'un conteneur-poubelle métalique.

1) Calculer la fréquence f des propriétaires des conteneur-poubelle métalique sur cet échantillon.

2) Peut-on affirmer que p = f ? Pourquoi ?

3) Donner l'intervalle de confiance I à 95% pour p.

4) Interpréter par une phrase l'intervalle de confiance I.

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction P(z)= $z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4$

1) Calculer P(1)

2) Déterminer les complexes a et b tels que :

P(z)= (z- 1)$(z^2 + az + b)$

3.a) Résoudre P(z)= 0

b) Donner les formes exponentielles des solutions de l'équation P(z)=0

4) Soient les points A, B et C d'affixes respectives : 1, 1-i et 2+2i
a) Placer les points A ; B et C

b) Déterminer le module et un argument de : $\frac{2+2i}{1-i}$ **puis en déduire la nature du triangle OBC**

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

M $\in \Gamma_1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1+i}{z-2-2i}\right| = 1$

M $\in \Gamma_2 \Leftrightarrow arg(z-1+i) - arg(z-2-2i) = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$

6) On considère les points M_n **d'affixes** Z_n **tel que :** $Z_n = (Z_C)^n$ **et** $U_n = |Z_n|$ **,**$\forall n \geq 0$

a)Donner la forme trigonométrique de Z_C

b) Déterminer n pour que $M_n \in (Ox)$

c) Montrer que (U_n) **est une suite géométrique**

d) Calculer en fonction de n : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots \ldots \ldots + U_n$.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{(x-2)e^x + 2x + 4}{e^x + 2}$**. On note Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$**.**

1) Montrer que pour tout réel x :

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2} \quad (1)$$

et

$$f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2} \quad (2)$$

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ **et** $+\infty$**.**

3) a) Montrer que la courbe Cf admet deux asymptotes obliques Δ_1 **et** Δ_2 **que l'on précisera.**

b) Etudier la position relative de Δ_1 ; Δ_2 **et Cf.**

4) a) Calculer f '(x) et donner le tableau de variation de f.

b) Tracer Δ_1 ; Δ_2 **et Cf .**

5) a) Déterminer la primitive F de f telle que F(ln2) = 0

b) Calculer l'aire du domaine plan limité par : Δ_1 ; Cf et les droites d'équations x = 0 et x = ln2.

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie par : $\forall x>0$ g(x)= $2x^3$- 1+2lnx

1)Dresser le tableau de variations de g

2)Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution $\propto$ et vérifier que 0 ,864<$\propto$< 0,865

3) En déduire le signe de g(x) sur l' intervalle $]0,+\infty[$.

Partie B

Soit la fonction F définie par : $\forall$ x$\in$ $]0,+\infty[$ f(x)= 2x - $\frac{lnx}{x^2}$

on note C_f sa courbe dans le repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

2) Montrer que f ' (x) = $\frac{g(x)}{x^3}$

3) Dresser le tableau de variations de f

4.a)Montrer que la courbe C_f admet une asymptote Δ dont on donnera une équation

b) Préciser la position de C_f avec Δ

5.a) Calculer la dérivée de la fonction : h(x)= $\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}$

b) On pose $\forall$ n$\geq$ 1 $I_n = 2\int_1^n \frac{lnx}{x^2}\,dx$ calculer I_n en fonction de n et $\lim\limits_{+\infty} I_n$

c) En déduire en fonction de n l'aire du domaine limitée par C_f ; l'asymptote Δ et les droites x=1 et x=n ;

SUJET 18

Exercice 1 (3 points)

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 10 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes qu'il a données. On considère les événements :
A : L'élève a exactement six réponses correctes.
B : L'élève n'a aucune réponse correcte.
C : L'élève a au moins une réponse correcte.
D : L'élève a toutes les réponses correctes.

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de valeurs de X est :	$\{1,2,...,10\}$	$\{0,1,...,4\}$	$\{0,1,2,...,10\}$
2	$p(A) =$	$\frac{1}{4}$	$C_{10}^{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$	$C_{6}^{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{6}\left(\frac{3}{4}\right)^{4}$
3	$p(B) =$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
4	$p(C) =$	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{9}$
5	$p(D) =$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
6	Le nombre de réponses correctes de l'élève, que l'on peut espérer est :	3	4	5

Exercice 2 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe l'équation :
$z^2 - 4z + 13 = 0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.

2) On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + z_1$ et $z_B = i + z_2$.

a) Ecrire les nombres $z_A = 1 + z_1$ et $z_B = i + z_2$ sous formes algébrique et trigonométrique.

b) Représenter, dans le repère $(O;\vec{u}, \vec{v})$, les points A et B. Déterminer la nature du triangle OAB.

c) Déterminer et placer le point C tel que le quadrilatère $OACB$ soit un parallélogramme.

d) Construire l'ensemble des M du plan d'affixe z tel que le complexe $\dfrac{z-2+2i}{z-3-3i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + (x-1)e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2 + xe^x$.

1) Dresser le tableau de variation de *g*.

2) En déduire le signe de *g* (*x*) pour tout réel *x*.

Partie B : étude et représentation de la fonction *f*

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

3.a) Calculer f'(x) puis, à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de *f*.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ .Vérifier que 0,4 < x_0 < 0,5.

4.a) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente T à la courbe est parallèle à l'asymptote (D). Donner l'équation de T.

b) Tracer (C) , T et (D).

c) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-1-me^{-x}=0$.

Exercice 4 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

__Partie A__ : On considère la fonction définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par :

$g(x) = x\ln x - x + 1$ et soit Γ sa courbe.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudier les variations de g et préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) On désigne par Γ' la courbe de la fonction $u(x) = \ln x$.

a) Etudier la position relative de Γ et Γ'.

b) Soit g_1 la fonction définie par : $\begin{cases} g_1(x) = x\ln x - x + 1 \\ g_1(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que g_1 est un prolongement continu de g en 0.

Etudier la dérivabilité de g_1 en 0.

c) Soit Γ_1 la courbe de g_1. Tracer les courbes Γ' et Γ_1. (fig :1).

4. a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :
$J = \int_1^e (t-1)\ln t dt$.

b) Soit Δ la partie du plan définie par :
$\Delta = \{M(x,y) / 1 \le x \le e; g(x) \le y \le \ln x\}$. **Calculer, en cm^2 l'aire de Δ**

<u>Partie</u> B : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f .(On remarquera que $f'(x)$ s'exprime en fonction de $g(x)$).

2) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α et que $3.5 < \alpha < 3.6$.

3) Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

a) Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$.

b) Etudier les variations de h.

c) Pour tout $x \in I = [3,4]$, montrer que : $h(x) \in I$ et $|h'(x)| \le \dfrac{5}{6}$.

4) On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Vérifier que $\alpha \in I$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{5}{6}|u_n - \alpha|$ et $|u_{n+1} - \alpha| \le \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

b) Montrer que (u_n) est convergente vers α.

SUJET 19

Exercice 1 (3 points)

Dans un laboratoire, on a fait les constats suivants concernant deux types d'anticorps A et B :

60% des souris porte l'anticorps A. 25% des souris porte l'anticorps A et B simultanément. La probabilité qu'une souris porte l'anticorps A, sachant qu'elle ne porte pas l'anticorps B, est égale à $\frac{5}{9}$.

On choisit une souris au hasard dans le laboratoire. On définit les évènements suivants :

A : «La souris porte l'anticorps A » ;

C : «La souris porte au moins l'un des anticorps A et B»;

B : «La souris porte l'anticorps B» ;

D : «La souris ne porte aucun des anticorps A et B».

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte. Choisir la bonne réponse.

	Question	A	B	C
1	$p(A)$ est :	0.6	0.06	0.5
2	$p(B)$ est :	0.63	0.37	0.77
3	$p(C)$ est :	0.72	0.97	0.98
4	$p(D)$ est :	0.03	0.3	0.28
5	$p_A(B)$ est :	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{37}$
6	$p_A(\overline{B})$ est :	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{9}$

Exercice 2 (4 points)

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E): $z^2 - 4z + 16 = 0$

1.a) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\mathrm{Im}(z_1) > 0$.

b) Donner la forme trigonométrique des nombres z_1 et z_2.

2) Le plan complexes est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = 2 + 2i\sqrt{3}, z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ **et** $z_C = -4$

a) Placer les points A, B et C dans le repère et déterminer la nature du triangle ABC.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Placer D.

3) Pour tout nombre $z \neq -4$, on pose : $f(z) = \dfrac{z - 2 + 2i\sqrt{3}}{z + 4}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(-2 - 2i\sqrt{3})$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = 4\sqrt{3}$

4)Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = \alpha^n$ (où α est le nombre calculé à la question 3.a-).

a) Montrer que pour tout n, $z_{n+3} = z_n$. Que peut-on dire de la suite de nombres complexes (z_n) ?

b) On note $U_n = |z_n|$. Que peut-on dire de la suite (U_n) ?

Exercice 3 (3 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+1}{e^x}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que la courbe (C) de f admet trois tangentes horizontales dont l'une est au point d'abscisse 1.

2.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire la courbe (C).

Exercice 4 (3 points)

Soit la suite (U_n) définie par $U_0=2$ et $U_{n+1}=3-e^{-U_n}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3-e^{-x}$.

1) Étudier les variations de f

2. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante.

b) Démontrer que la suite (U_n) est majorée par 3 .

c) Que peut-on en déduire pour (U_n)?

Exercice 5 (7 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^2-3+\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

b) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α telle que $1,1<\alpha<1,2$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=2x+\dfrac{2-x-\ln x}{x}$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $2cm$.

1.a) Justifier que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter géométriquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(f(x)-(2x-1)\right)$.En déduire que (C) admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$. Etudier leur position relative.

2.a) Calculer $f'(x)$ puis vérifier que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Vérifier que $f(\alpha)=\dfrac{4\alpha^2-\alpha-1}{\alpha}$ et en donner une valeur approchée.

3.a) Tracer (C) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $2cm$.

b) Donner une primitive F de f sur $]0;+\infty[$.

c) Calculer l'aire, en centimètre carré, du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

SUJET 20

Exercice 1 (3 points)

Le temps d'attente exprimé en minutes au guichet d'une banque est une variable aléatoire T suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On sait que la probabilité qu'un client attende moins de 10 minutes est égale à 0,8.

1) Calculer une valeur approchée à 0,0001 de λ

2) Calculer la probabilité qu'un client attende entre 15 et 20 minutes

Exercice 2 (3 points)

Soit la fonction numérique f définie sur [0;1] par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{-x^2 \ln x}{1+x}; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1.a) Montrer que la fonction u définie sur [0;1[par : $u(x) = \dfrac{1+x}{2+x} + \ln x$ est strictement croissante.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur [0;1[.

c) En déduire que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]0;1]$. Vérifier que $0,54 \leq \beta \leq 0,55$.

2.a) Montrer que la fonction f est continue sur [0;1].

b) Etudier les variations de la fonction f.

c) Tracer sa courbe représentative dans repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ en précisant les tangentes aux points d'abscisse 0 et 1.

Exercice 3 (3 points)

Le nombre de bactéries $N(t)$ que renferme une culture au temps *t* (exprimé en jours) est donné par : $N(t) = N_0 e^{\beta t}$

Où N_0 est le nombre initial de bactéries et β un coefficient dépendant du type de bactéries et du milieu ambiant.

On a estimé le nombre de bactéries d'une culture à 200 000 après 3 jours et à 1 600 000 après 4,5 jours.

1) Quel est le nombre de bactéries après 5 jours ?

2) Quand la culture contient-elle 800 000 bactéries ?

Exercice 4 (3 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

b)Calculer la dérivée de f et dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe (C).

2.a)Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

b) Déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 5 (8 points)

1) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par g(x) = x(1+lnx) – 2lnx

a) Calculer g'(x) et montrer que :

pour $x > 1$ on a $g'(x) > 0$ et pour $x < 1$ on a $g'(x) < 0$

b) Dresser le tableau de variation de g

c) En déduire que pour tout $x > 0$ on a : $g(x) \geq 1$

2) Soit $f(x) = 1 + x\ln x - (\ln x)^2$; (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm

a) Calculer les limites de f aux bornes de $]0;+\infty[$

b) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ et dresser le tableau de variation de f

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans $]0;+\infty[$

d) Montrer que $\alpha \in \left]0;\frac{1}{2}\right[$ et donner un encadrement de α d'amplitude 3×10^{-1}.

3) a) Ecrire l'équation de la tangente T au point $x_0 = 1$

b) Déterminer les points de (C) où la tangente est parallèle à la droite (D) : y = x

4) a) Dresser le tableau de variation de $h(x) = x - 1 - \ln x$

b) En déduire le signe de h

c) Montrer que : $f(x) - x = (\ln x - 1)h(x)$ et préciser la position relative de (C) et T

5) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

b) Tracer (C) et T.

c) Discuter graphiquement et suivant les valeurs du paramètre m le nombre des solutions de l'équation :

$\mathbf{1 - m - x(1 - \ln x) - (\ln x)^2 = 0}$ **, (On pourra utiliser 3.b).**

6) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0; +\infty[$ sur un intevalle J que l'on déterminera

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1} la réciproque de f et tracer (C') courbe de f^{-1}

7) a) En utilisant une intégration par parties ; calculer les intégrales

$$I_1 = \int_1^e x\ln x\,dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

b) Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par les courbes (C) et (C') et les droites d'équations

x = 0 , y = 0.

SUJET 21

Exercice 1 (4 points)

Une étude médicale a montré que 2% d'une population sont atteint d'une maladie M.

Un échantillon de n individus ($n \geq 2$) a été choisi d'une façon aléatoire dans cette population pour être soumis à des testes de dépistage relatifs à la maladie M (on suppose l'équiprobabilité).

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'individus, de cet ensemble atteints de la maladie M.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Calculer en fonction de n la probabilité de chacun des événements suivants :

A «Aucun individu de cet ensemble n'est atteint de la maladie M»

B « Un seul individu de cet ensemble est atteint de la maladie M »

C « Au moins un individu de cet ensemble est atteint de la maladie M ».

3) Soit p_n la probabilité d'avoir au moins un individu de cet échantillon atteint de la maladie M donc $p_n = p(C)$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

b) Quel est le plus petit nombre n d'individus à tester afin d'avoir $p_n \geq 0,95$?

Exercice 2 (4 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty .$$

2.a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Tracer la courbe (C).

3) On pose $I = \int_0^1 f(x)dx$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout réel x :

$$f'(x) = f(x) + ae^x + b + \frac{ce^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

b) En déduire I.

Exercice 3 (4 points)

1) On considère la fonction numérique f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln(x+1) - x\ln x, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que f est continue à droite de zéro.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite de zéro. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. Interpréter graphiquement.

2.a) Vérifier que $f''(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe.

c) Calculer A_1 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ (On pourra utiliser une intégration par parties).

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction $g(x) = -\ln(1 - xe^{-x})$.

1.a) Montrer que pour tout réel x, on a $e^x > x$. En déduire que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Donner une interprétation graphique.

c) Montrer que $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, puis calculer et interpréter graphiquement $\lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x}$.

2.a) Vérifier que $g'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$ et dresser le tableau de variation de g.

b) Tracer Γ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3) On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}.$$

a) Vérifier que $f(x) = e^{g(x)}$.

b) Déduire de la question 1) : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. Donner une interprétation graphique.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe Γ' dans le même repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

4) Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe Γ', l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que $1 \leq A \leq \frac{e}{e-1}$.

(On ne cherche pas à calculer la valeur exacte de A).

Exercice 5 (4 points)

1) On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x)=\frac{3x^3-12x^2+19x-10}{x^3-4x^2+5x}$$

a) Déterminer a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$g(x)=\frac{(x-1)(ax^2+bx+c)}{x(x^2-4x+5)}.$$

b) Etudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

2) On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=3x-3+\ln\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2}\right)$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Montrer que (C) admet deux asymptotes dont l'une, notée D, est oblique. Etudier la position relative de (C) et de D.

3.a) Vérifier que $f'(x)=g(x)$ où g est la fonction définie en 1), et dresser le tableau de variation de f .

b) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} .

c) Construire (C).

SUJET 22

Exercice 1 (3 points)

Un élève doit arriver au lycée entre 7 h et 8 h.

L'heure d'arrivée en minute est modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

1) Donner la densité de cette variable aléatoire.

2) Quelle est la probabilité qu'il arrive à 7 h 30?

3) Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 7 h 20?

4) Quelle est la probabilité qu'il arrive entre 7 h 15 et 7 h 45?

Exercice 2 (3 points)

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : *"la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant"*.

On suppose que la température de l'air ambiant est constante égale à 25°C.

Dans ces conditions, la température d'un corps passe de 100°C à 70°C en 15 minutes.

Au bout de combien de temps se trouvera-t-il à 40°C ?

Exercice 3 (6 points)

1) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = -x^3 + x^2 - 4x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g.

b) Montrer que g réalise une bijection de IR sur IR.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $0,5 \leq \alpha \leq 0,6$.

2) On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{2xe^{-x}}{x^2 + 2}$.

a) Vérifier que $f'(x) = \dfrac{2g(x)e^{-x}}{(x^2 + 2)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 1cm, \|\vec{j}\| = 5cm$.

3) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $U_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

On ne cherche pas à calculer l'intégrale U_n

a) Donner une interprétation graphique du nombre U_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $f(n+1) \leq U_n \leq f(n)$.

c) Quel est le sens de variation de la suite (U_n).

d) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq U_n \leq (1 - \frac{1}{e})e^{-n}$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$. Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq U_n \leq 10^{-5}$.

Exercice 4 (8 points)

Partie A

On considère la fonction *g* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = x^3 - 3 + 2\ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2. a) Montrer que g réalise une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α.

Vérifier que $1,3 \leq \alpha \leq 1,4$

c) En déduire le signe de la fonction *g* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ **par :**

$f(x)=x-2+\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan, muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ **orthonormé.**

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **et**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(x-2)\big)=0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

c) Étudier le signe de $d(x)=f(x)-(x-2)$ **, résumer dans un tableau et interpréter graphiquement.**

2.a) Calculer $f'(x)$ **et justifier que** $f'(x)$ **a même signe que** $g(x)$.

b) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{3\alpha^3-4\alpha^2-1}{2\alpha^2}$ **et donner une valeur approchée de** $f(\alpha)$ **à** 10^{-1} **près.**

c) En déduire le tableau de variation de la fonction *f*.

3.a) Donner l'équation de la tangente T à Γ au point A d'abscisse $x_0 = 1$.

b) Montrer que la courbe Γ coupe l'axe des abscisses en un deuxième point autre que A d'abscisse β telle que $1,9 \leq \beta \leq 2$

c) Tracer l'allure de la courbe Γ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$**.**

4) Soit *n* un entier naturel $n \geq 3$. On considère l'aire du domaine E du plan compris entre la courbe Γ et les droites d'équations respectives $y = x - 2$, $x = 3$ et $x = n$.

a) Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = \int_3^n \frac{-1 + \ln x}{x^2}\,dx .$$

b) Calculer $J_n = \int_3^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire I_n en fonction de n .

c) Calculer la limite de l'aire I_n du domaine E quand *n* tend vers $+\infty$.

SUJET 23

Exercice 1 (3 points)

Chaque jour, une femme arrive à sa maison à 12 h et repart à 12 h 30.
Sa fille arrive aléatoirement entre 11 h 45 et 13 h 15 et reste 5 min avant de repartir.

L'heure d'arrivée en minute est modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

1) Quelle est la probabilité qu'elles se croisent ?

2) La fille n'est pas arrivée à la maison à 12 h 15. Quelle est la probabilité qu'elles se croisent ?

3) En moyenne, sur un grand nombre de journée, à quelle heure la fille arrive-t-elle ?

Exercice 2 (5 points)

Soit la fonction f **définie sur** $\mathbb{R}$ **par** $f(x)=(2-x)e^{x}$**. Soit** (C) **la courbe représentative de** f **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$**.**

1. a) Justifier et interpréter graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \quad \textbf{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty\ .$$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Donner l'équation de la tangente T à (C) au point A d'abscisse 0. Vérifier que A est un point d'inflexion de (C) .

d) Tracer la courbe (C).

e)Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y''-2y'+y=0$.

2) On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout entier naturel par : $U_n=\dfrac{2^n}{n!}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$ **,** $0\leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n}\leq \dfrac{2}{3}$ **.**

b) Montrer que pour tout entier naturel $n\geq 2$ **,** $0\leq U_n\leq 2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2}$ **. En déduire** $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ **.**

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x+2+e^x$.

Soit (C)sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+2))$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2. Dresser le tableau de variation de f.

3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique <u>solution</u> α puis vérifier que $-2,5<\alpha<-2$.

5. Construire les courbes (C) et (C') représentant respectivement la fonction f et sa réciproque f^{-1} dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

6.a) Déterminer la primitive F de f qui vérifie : $F(0)=0$.

b) Soit $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x=\alpha$ et $x=0$.

Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que $A(\alpha)=\dfrac{6-2\alpha-\alpha^2}{2}$.

7.a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0=\alpha$.

b) Vérifier que : $(f^{-1})'(0)=\dfrac{-1}{\alpha+1}$.

Exercice 4 (7 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 2 - x - \ln x$.

1.a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calculer la dérivée $g'(x)$ et dresser le tableau de variation de g.

2.a) Montrer que g réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $1,55 \leq \alpha \leq 1,56$

c) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (1 - \frac{1}{x})(1 - \ln x)$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

b) Interpréter graphiquement les limites précédentes.

2.a) Calculer la dérivée $f'(x)$. Vérifier que pour tout réel x de $]0;+\infty[$,

$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ et donner une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-1} près.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses. Tracer (C).

4.a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^x \ln t dt$.

b) En remarquant que $f(x) = 1 - \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x$, donner une primitive F de f sur $[1;+\infty[$.

c) Calculer l'aire S du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

SUJET 24

Exercice 1 (3 points)

Entre les deux tours d'une élection municipale, il ne reste que deux candidats A et B en lice. Lors d'un débat télévisé, A affirme sur la foi d'un sondage secret que si l'élection avait lieu maintenant, il gagnerait largement avec 60% des voix. Avant la fin du débat, B fait effectuer un sondage par téléphone auprès de 200 personnes en âge de voter. Le résultat donne 104 personnes en faveur de A.

1) En supposant que le sondage secret reflète fidèlement l'opinion des électeurs le jour du débat, donner l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence des personnes favorables à A sur un échantillon de 200 pesonnes.

2) Que peut-on dire suite au résultat du sondage demandé par B ?

3) Reprendre les deux questions avec un intervalle de fluctuation au seuil de 98%.

Exercice 2 (3 points)

Une substance se dissout dans l'eau. On admet que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute (quantité restante).

À l'instant t = 0 (t en minutes), on place 20 grammes de cette substance dans une grande quantité d'eau. On observe que les dix premiers grammes se dissolvent en cinq minutes.

On note f(t) la quantité dissoute après t minutes, en grammes.

1) Justifier que $f(t) = 20e^{\frac{-\ln 2}{5}t}$

2) Combien de temps faut-il encore attendre pour qu'il reste seulement 2g ?

Exercice 3 (4 points)

Soit la fonction f **définie sur** $\left]-1,+\infty\right[$ **par** $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - (x+1)\ln(x+1)$ **.**

On note (C) **la courbe représentative de** f **dans un repère orthonormé** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **.**

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ **puis calculer** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ **.**

Interpréter graphiquement.

2. a) Calculer $f'(x)$ **et** $f''(x)$ **puis étudier les variations de** f' **.**

b) Calculer $f'(0)$ **et en déduire le signe de** $f'(x)$ **.**

3. a) Dresser le tableau de variation de f **.**

b) Tracer la courbe (C) **.**

Exercice 4 (4 points)

1) Soit g **la fonction définie sur l'intervalle** $]0\,;+\infty[$ **par :** $g(x) = -x^2 - \ln x$ **.**

a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α. Vérifier que $\frac{1}{e}<\alpha<1$. En déduire le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=-x+1+\frac{1}{x}(1+\ln x).$$

a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Interpréter graphiquement.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(1-x))$. Interpréter graphiquement.

c) Vérifier que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f.

d) Construire la courbe représentative de f.

Exercice 5 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-4x+4)e^x$

Soit C sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité $1cm$.

1.a) Montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$. Interpréter graphiquement.

b) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que la courbe C admet deux tangentes horizontales que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation f.

3) Déterminer l'intersection de C avec les axes des coordonnées puis construire C dans $(O;\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[0;2]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;2]$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 et calculer $(g^{-1})'(e)$.

5.a) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction définie par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=2$.

6) Soit $U_n=\int_0^{\frac{2}{n}} f(x)dx$. n est un entier naturel non nul.

a) Calculer U_1 et l'interpréter graphiquement.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante et positive.

c) Justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=0$ et interpréter graphiquement.

SUJET 25

Exercice 1 (3 points)

On admet que 13% d'enfants, moins de 12 ans, d'une ville, ont eu dans leur vie une crise d'asthme. Les services sanitaires de la ville décident de réaliser une étude et d'évaluer la proportion d'enfants moins de 12 ans ayant déjà eu des crises d'asthme. Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 enfants moins de 12 ans. Le medecin responsable a pris la décision suivante : si la proportion observée est supérieure à la borne supérieure de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% alors une investigation plus complète sera mise en place afin de rechercher les facteurs de risque pouvant expliquer cette proportion élevée.

1) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion d'enfants moins de 12 ans ayant eu une crise d'asthme dans un échantillon de taille 100.

2) L'étude réalisée auprès des 100 personnes a dénombré 19 enfants moins de 12 ans ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

3) Le médecin n'est pas convaincu par cette conclusion et déclare que le nombre de personnes interrogées était insuffisant pour mettre en évidence qu'il y avait plus d'enfants ayant eu des crises d'asthme que

dans le reste du pays. Combien faudrait-il prendre de personnes pour qu'une proportion observée de 19% soit en dehors de l'intervalle de fluctuation asymptotique ?

Exercice 2 (5 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$\mathbf{z^2 - 2z + 10 = 0}$

2) On considère le polynôme P définie par :

$$\mathbf{P(z) = z^3 - (2+2i)z^2 + (10+4i)z - 20i}$$

a)Calculer $\mathbf{P(2i)}$ et Déterminer des nombres complexes a et b tels que pour tout z : $\mathbf{P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)}$

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $\mathbf{P(z) = 0}$

3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé$(\mathbf{O}\,;\vec{\mathbf{u}}\,;\vec{\mathbf{v}})$. On considère les points A ;B et C d'affixes respectives : $\mathbf{2i}$;

$\mathbf{1+i}$ et $\mathbf{1+3i}$ et pour tout $\mathbf{z \neq 1+3i}$ on pose :$\mathbf{f(z) = \frac{z-1-i}{z-1-3i}}$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Résoudre l'équation $f(z) = -i$. En déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer z_D affixe du point D pour que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

4.a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$..

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que $f(z)$ est imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M d'affixe z tels que$|f(z) - 1| = \sqrt{2}$

d) Justifier que le point A est commun aux ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3.

Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ par $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

1) Étude d'une fonction auxiliaire

a) Soit la fonction g définie sur [0 ; +∞[par $g(x) = x^2e^x - 1$.

Étudier le sens de variation de la fonction g

b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left]0\ ;+\infty\right[$ tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0,70 \leq \alpha \leq 0,71$.

c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\left]0\ ;+\infty\right[$.

2) Étude de la fonction f

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b) On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $\left]0\ ;+\infty\right[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

c) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m=\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}$.

e) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

f) Tracer la courbe de f.

Exercice 4 (7 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = x^2 - 2 + (x-3)\ln x$ **.**

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

1) Calculer et donner une interprétation graphique de : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2.a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x+3)}{x} + \ln x$.

b) Justifier que: $\begin{cases} x \geq 1 \Rightarrow \quad f'(x) \geq 0 \\ 0 < x \leq 1 \Rightarrow \quad f'(x) \leq 0 \end{cases}$ **.**

c) Dresser le tableau de variation de f.

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ exactement deux solutions α et β telles que $\alpha < \beta$. Vérifier que $0,4 < \alpha < 0,5$ et $1,6 < \beta < 1,7$.

b) Construire la courbe (C).

4) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]0;1]$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Construire, dans le repère précèdent, la courbe (C') représentative de g^{-1}.

5) On pose pour tout $x > 0$, $H(x) = (\frac{1}{2}x^2 - 3x)\ln x - \frac{1}{4}x^2 + 3x$

a) Justifier que H est dérivable sur $]0;+\infty[$ et calculer $H'(x)$.

b)Déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

6) Soit la suite numérique (A_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 3$ par : $A_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$.

a) Vérifier que la suite (A_n) est croissante et positive.

b)Donner l'expression de A_n en fonction de n et α et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$.

c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner à cette limite ?

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques et logiques

Publications AMIMATHS

avec l'appui du

Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif

Cahier de Maths 4AS

Contrôle continu 4AS

Contrôle continu 7D

Contrôle continu 7C

Rallyes de Maths 3ème

Rallyes de Maths 5ème

Rallyes de Maths 6ème

Olympiades de Maths 4ème

Olympiades de Maths 7ème

Jeux mathématiques et logiques