جمعية أصدقاء الرياضيات

ASSOCIATION DES AMIS DE MATHEMATIQUES

Bac Blanc Décembre 2018

Proposition d'un Corrigé de l'épreuve des Mathématiques pour la série SN

Exercice 1

Question n°	**1**	**2**	**3**	**4**
Bonne réponse	**A**	**A**	**B**	**C**

Exercice 2

1) $U_2 = \frac{1}{6}$, $U_3 = \frac{1}{11}$.

2) a) $V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} = \frac{5u_n + 1}{u_n} = 5 + \frac{1}{u_n} = 5 + V_n$ **donc (V_n) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme** $V_1 = \frac{1}{U_1} = 1$. **D'où** $V_n = V_1 + 5(n-1) = 5n - 4$ **et par conséquence** $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{5n-4}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5n-4}\right) = 0$ **alors la suite (U_n) converge vers 0.**

c) $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ **est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique alors** $S_n = \frac{n(V_1 + V_n)}{2} = \frac{n(5n-3)}{2} = \frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$

Exercice 3

1.a) $u_2 = \frac{3}{2}\times 1 + \frac{4}{2} = \frac{7}{2}$ **et** $u_3 = \frac{6}{3}\times\frac{7}{2} + \frac{4}{3} = 7 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

b) Comme $u_3 + u_1 = \frac{25}{3} + 1 = \frac{28}{3} \neq 2\times\frac{7}{2} = 2u_2$ **alors (u_n) n'est pas arithmétique et comme** $u_3 \times u_1 = \frac{25}{3}\times 1 = \frac{25}{3} \neq \frac{49}{4} = u_2^2$ **alors (u_n) n'est pas géométrique**

c) On a $u_1 = 1 > 0$ **et si** $u_n > 0$ **alors** $\frac{3n}{n+1}u_n + \frac{4}{n+1} > 0$, **d'où** $u_{n+1} > 0$ **et donc** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$

d) $u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3n}{n+1} - 1\right)u_n + \frac{4}{n+1} = \frac{2n-1}{n+1}u_n + \frac{4}{n+1} > 0$ **donc la suite (u_n) est strictement croissante**

2) a) $v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} + 2 = 3nu_n + 6 = 3v_n$ **donc (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme** $v_1 = u_1 + 2 = 3$.

b) Expression de v_n en fonction de n : $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3\times 3^{n-1} = 3^n$

c) Pour tout entier $n \geq 1$ **:** $v_n = nu_n + 2 \Rightarrow u_n = \frac{v_n - 2}{n}$ **d'où** $u_n = \frac{3^n - 2}{n}$.

3) $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots + nu_n = \sum_{p=1}^{n} pu_p = \sum_{p=1}^{n}(v_p - 2) = \sum_{p=1}^{n} v_p - 2n = 3\times\frac{3^n - 1}{3-1} - 2n$ **; d'où** $S_n = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} - 2n$

Exercice 4

1) Pour l'équation $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0$ **on a** $\Delta' = -3 - 4i = (1-2i)^2$ **dont les solutions sont** $z_1 = 1 - i$ **ou** $z_2 = -1 + 3i$

2° a) $P(2i) = (2i)^3 - 4i(2i)^2 + (-2+4i)(2i) + 8 - 4i = -8i + 16i - 4i - 8 + 8 - 4i = 0$

Tableau de Horner

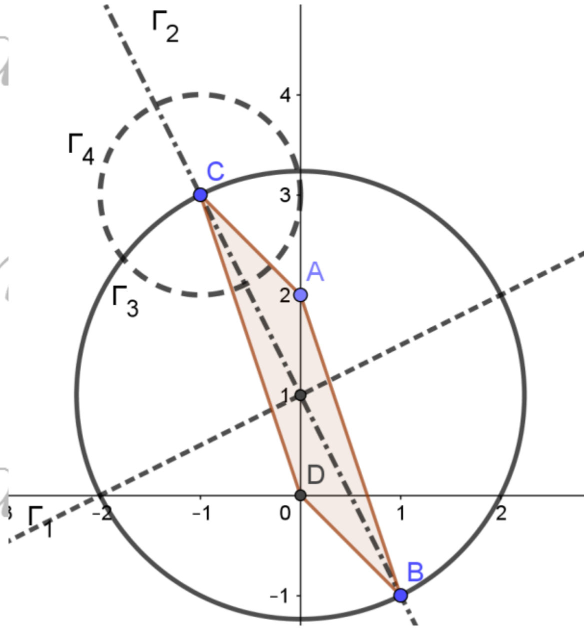
	1	-4i	-2+4i	8-4i
2i		2i	4	-8+4i
	1	-2i	2+4i	0

Alors d'après le tableau on a $P(z)=(z-2i)(z^2-2iz+2+4i)$

b) l'équation $P(z)=0 \Leftrightarrow z-2i=0$ **ou** $z^2-2iz+2+4i=0$. **La première a pour solution 2i et, d'après la question n°1, la deuxième a pour solutions** $z_1=1-i$ **ou** $z_2=-1+3i$ **donc l'ensemble des solutions de l'équation** $P(z)=0$ **est** $S=\{2i;1-i;-1+3i\}$

3) a) $z_A=(1+i)^2=2i$, $z_B=\dfrac{7+i}{3+4i}=\dfrac{(7+i)(3-4i)}{25}=1-i$ **et** $z_C=\dfrac{1+7i}{2-i}=\dfrac{(1+7i)(2+i)}{5}=-1+3i$.

b) Représentation des points A, B **et** C **(voire la figure)**



c) On a $z_D=-z_A+z_B+z_C=-2i+1-i-1+3i=0$ **(D est donc confondu avec O)**

4) Pour tout complexe $z\neq -1+3i$ **par**

$$f(z)=\frac{(1+i)z-2}{z+1-3i}=\frac{(1+i)z+(1+i)(-1+i)}{z+1-3i}=(1+i)\frac{z-1+i}{z+1-3i}$$

5) On remarque que

$$f(z)=(1+i)\frac{z-1+i}{z+1-3i}=(1+i)\left(\frac{z-z_B}{z-z_C}\right)$$

a. $|f(z)|=|1+i|\left|\dfrac{z-z_B}{z-z_C}\right|=\sqrt{2}\,\dfrac{MB}{MC}$

Donc $|f(z)|=\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{MB}{MC}=1$ **d'où** Γ_1 **est la médiatrice de** $[BC]$ **(**Γ_1 **est la droite en tirets sur la figure).**

b. Γ_2 **tel que** $\arg(f(z))=\arg\left[(1+i)\dfrac{z-1+i}{z+1-3i}\right]=\arg(1+i)+\arg\left(\dfrac{z-z_B}{z-z_C}\right)=\dfrac{\pi}{4}+\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)$

$\arg(f(z))=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{4}+\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)=0\ [\pi]$**, d'où** Γ_2 **est la droite** (BC) **privée de B et C (**Γ_2 **est la droite en tirets et points sur la figure).**

c. $\arg(f(z))=\dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{4}+\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$**, d'où** Γ_3 **est le cercle de diamètre** $[BC]$ **privé de B et C (**Γ_3 **est le cercle en trait plein sur la figure).**

d. $|f(z)-1-i|=\left|(1+i)\dfrac{z-1+i}{z+1-3i}-(1+i)\right|=|1+i|\left|\dfrac{z-1+i}{z+1-3i}-1\right|=\sqrt{2}\left|\dfrac{z-1+i-z-1+3i}{z+1-3i}\right|=\sqrt{2}\left|\dfrac{-2+4i}{z+1-3i}\right|=\dfrac{2\sqrt{10}}{MC}$ **alors**

$|f(z)-1-i|=2\sqrt{10}\Leftrightarrow\dfrac{2\sqrt{10}}{MC}=2\sqrt{10}\Leftrightarrow MC=1$ **donc** Γ_4 **est le cercle de centre C et de rayon 1 (**Γ_3 **est le cercle en tirets sur la figure).**

6.a) $\alpha=f(-2)=\dfrac{-4-2i}{-1-3i}=\dfrac{(-4-2i)(-1+3i)}{10}=1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

b) $\arg(\alpha^{2018})=-\dfrac{1009\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}-504\pi=-\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ **donc le nombre** α^{2018} **est imaginaire pur.**

FIN