ASSOCIATION DES AMIS DE MATHEMATIQUES

BAC BLANC

Corrigé de l'épreuve de Maths

Niveau : 7C **Date : 26/12/2018**

Exercice 1 (4 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On pose* $N = A - I_4$.

1. (a) *Calculer* N.

(b) *Calculer* N^2 *et* N^3.

(c) *Vérifier que* $N^4 = O$ *où* O *est la matrice carrée nulle d'ordre* 4. *(On dit que* N *est nilpotente).*

2. *En remarquant que* $A = N + I_4$, $N^0 = I_4$ *et que* N *et* I_4 *commutent :*

(a) *Montrer que pour tout entier naturel* n, $A^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k$.

(b) *En déduire en fonction de* n *l'expression de* A^n.

Solution.

1. (a) $N = A - I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $N^4 = N^3 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien $N^4 = O$.

2. (a) On rappelle que pour tout couple (n, k) d'entiers, on a :

$$C_n^k = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>1re méthode :</u> Utilisation d'un raisonnement par récurrence

Posons $(\mathcal{P}_n)$: $A^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k$.

— **<u>Initialisation :</u>** $A^0 = I_4 = \sum_{k=0}^{3} C_0^k N^k$ puisque $N^0 = I_4$, $C_0^0 = 1$ et $C_0^k = 0$ pour $k \in \{1, 2, 3\}$.

Ainsi $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie et montrons que $(\mathcal{P}_{n+1})$ l'est aussi. Exprimons alors A^{n+1} :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= (N + I_4)\, A^n \\
&= N \times A^n + A^n \\
&= N\left(\sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k\right) + \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^{k+1} + \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k \\
&= \sum_{k=1}^{4} C_n^{k-1} N^k + \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k \\
&= \sum_{k=1}^{3} C_n^{k-1} N^k + \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k && \text{(car } N^4 = O\text{)} \\
&= C_n^0 N^0 + \sum_{k=1}^{3} \left(C_n^{k-1} + C_n^k\right) N^k \\
&= C_{n+1}^0 N^0 + \sum_{k=1}^{3} C_{n+1}^k N^k \\
&= \sum_{k=0}^{3} C_{n+1}^k N^k
\end{aligned}$$

En effet,

$$C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0$$

et, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \begin{cases} C_{n+1}^k & \text{si } k \leq n \text{ (Formule du triangle de Pascal)} \\ 1 + 0 = 1 = C_{n+1}^k & \text{si } k = n+1 \\ 0 + 0 = 0 = C_{n+1}^k & \text{sinon} \end{cases}$$

La proposition $(\mathcal{P}_{n+1})$ est alors vraie.

On conclut que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2nde méthode : Utilisation de la formule du binôme de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$A^n = (N + I_4)^n$$

Compte tenu du fait que N et I_4 commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (N + I_4)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k I_4^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k$$

ce qui prouve immédiatement l'assertion si $n = 3$. Dans le cas contraire, nous avons :

— soit $n < 3$, alors

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k = \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k$$

puisque $C_n^k = 0$ pour tout entier $k \in \{n+1, \ldots, 3\}$.

— soit $n > 3$, alors

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k = \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k$$

puisque $N^k = N^4 \times N^{k-4} = O \times N^{k-4} = O$ pour tout entier $k \geq 4$.

Ainsi,

$$\boldsymbol{A^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k}$$

pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$.

(b) Soit $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, on a

$$\boldsymbol{A^n = \sum_{k=0}^{3} C_n^k N^k = I_4 + C_n^1 N + C_n^2 N^2 + C_n^3 N^3}$$

avec :

- $\boldsymbol{C_n^1 = n}$ si $\boldsymbol{n \geq 1}$. Ce qui est valable si $\boldsymbol{n = 0}$ puisque $\boldsymbol{C_0^1 = 0}$,
- $\boldsymbol{C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}}$ si $\boldsymbol{n \geq 2}$. Ce qui est valable si $\boldsymbol{n \in \{0, 1\}}$ puisque $\boldsymbol{C_0^2 = C_1^2 = 0}$,
- $\boldsymbol{C_n^3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$ si $\boldsymbol{n \geq 3}$. Ce qui est valable si $\boldsymbol{n \in \{0, 1, 2\}}$ puisque $\boldsymbol{C_0^3 = C_1^3 = C_2^3 = 0}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A^n} &= \boldsymbol{I_4 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}N^3} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 - n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 - 2n \\ 0 & 0 & 1 & 3n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Exercice 2 (5 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(\boldsymbol{E})$: $\mathbf{19x-11y=1}$.

1. (a) *Justifier que $(\boldsymbol{E})$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.*

(b) *Vérifier que le couple $(\mathbf{7,12})$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$.*

(c) *Résoudre $(\boldsymbol{E})$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.*

2. (a) *Soit $n\in\mathbb{Z}$. Montrer que :* $\begin{cases} n\equiv 4 \quad [19]\\ n\equiv 5 \quad [11]\end{cases}$ *si et seulement si $n\equiv 137 \quad [209]$.*

(b) *Quel est le $\mathbf{PGCD}(n,209)$?*

(c) *Si une marchandise est mise dans des cartons à **19** pièces le dernier carton ne contient que **4** pièces et si elle est mise dans des cartons à **11** pièces le dernier carton ne contient que **5** pièces. Déterminer le nombre de pièces de cette marchandise sachant qu'il est entre **1810** et **2220**.*

Solution.

1. (a) **19** et **11** sont deux nombres premiers distincts, donc $\mathbf{PGCD(19,11)=1}$. Il en résulte que $(\boldsymbol{E})$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

(b) $(7,12)$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$ car $19\times 7-11\times 12=133-132=1$.

(c) Si $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est une solution de $(\boldsymbol{E})$, alors

$$19x-11y=1=19\times 7-11\times 12$$

d'où

$$19(x-7)=11(y-12) \qquad (*)$$

On en déduit que $\begin{cases} 11 \mid 19(x-7)\\ 11\wedge 19=1\end{cases}$, Ce qui implique d'après Gauss que $11\mid(x-7)$. Il existe alors un entier relatif k tel que $x-7=11k$, soit

$$x=11k+7$$

En injectant cette valeur de x dans l'égalité $(*)$, on obtient $19\times 11k=11(y-12)$, soit

$$y=19k+12$$

Réciproquement, si $(x,y)=(11k+7,19k+12)$ où $k\in\mathbb{Z}$, alors

$$19x-11y=19(11k+7)-11(19k+12)=209k+133-209k-132=1$$

d'où (x,y) est une solution de $(\boldsymbol{E})$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
L'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E})$ dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(11k+7,19k+12)\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de $(\boldsymbol{E})$ dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}&=\{(11k+7,19k+12)\mid k\in\mathbb{Z},11k+7\geq 0,19k+12\geq 0\}\\ &=\left\{(11k+7,19k+12)\mid k\in\mathbb{Z},k\geq\frac{-7}{11},k\geq\frac{-12}{19}\right\}\\ &=\{(11k+7,19k+12)\mid k\in\mathbb{Z},k\geq 0\}\\ &=\{(11k+7,19k+12)\mid k\in\mathbb{N}\}\end{aligned}$$

2. (a) $n\in\mathbb{Z}$. Supposons que $\begin{cases} n\equiv 4 \quad [19]\\ n\equiv 5 \quad [11]\end{cases}$, alors il existe deux entiers relatifs x et y tels que

$$\begin{cases} n=4+19x\\ n=5+11y\end{cases} \implies \begin{cases} n=4+19x\\ 19x-11y=1\end{cases}$$

D'après les questions précédentes, il existe un entier relatifs $\boldsymbol{k}$ tel que

$$\begin{cases} n = 4 + 19x \\ x = 11k + 7 \end{cases} \implies n = 4 + 19(11k + 7) = 4 + 209k + 133 = 137 + 209k$$

On a alors

$$n \equiv 137 \quad [209]$$

Réciproquement, si $n \equiv 137 \quad [209]$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = 137 + 209k \implies \begin{cases} n = 4 + 19 \times 7 + 19 \times 11k = 4 + 19(7 + 11k) \\ n = 5 + 11 \times 12 + 11 \times 19k = 5 + 11(12 + 19k) \end{cases} \implies \begin{cases} n \equiv 4 \quad [19] \\ n \equiv 5 \quad [11] \end{cases}$$

Ainsi, $\begin{cases} n \equiv 4 \quad [19] \\ n \equiv 5 \quad [11] \end{cases}$ si et seulement si $n \equiv 137 \quad [209]$.

(b) Nous savons que le $\mathbf{PGCD}(209, n)$ divise $\mathbf{209}$. De plus, si $\boldsymbol{n}$ vérifie les conditions de la question précédente, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 137 + 209k$, donc le $\mathbf{PGCD}(209, n)$ divise aussi $\mathbf{137}$. Ainsi, il divise $\mathbf{PGCD}(137, 209) = 1$. Enfin, on conclut que

$$\mathbf{PGCD}(209, n) = 1$$

(c) Si $\boldsymbol{n}$ est le nombre de pièces de cette marchandise, alors

$$\begin{cases} n \equiv 4 \quad [19] \\ n \equiv 5 \quad [11] \\ 1810 \leq n \leq 2220 \end{cases}$$

ce qui est équivalent, d'après la question précédente, à

$$\begin{cases} n \equiv 137 \quad [209] \\ 1810 \leq n \leq 2220 \end{cases}$$

ce qui signifie que

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}; n = 137 + 209k \\ 1810 \leq n \leq 2220 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}; n = 137 + 209k \\ 1810 \leq 137 + 209k \leq 2220 \end{cases}$$

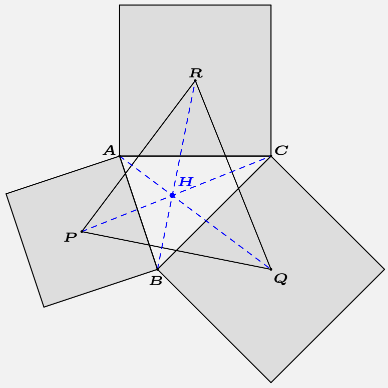
ce qui revient à

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}; n = 137 + 209k \\ 8 < \dfrac{1810 - 137}{209} \leq k \leq \dfrac{2220 - 137}{209} < 10 \end{cases}$$

Ainsi, $k = 9$ et le nombre de pièces de la marchandise est $n = 137 + 209 \times 9 = 2018$. □

Exercice 3 (5 points)

On considère un triangle ABC direct. On construit à l'extérieur de celui-ci trois carrés, qui s'appuient respectivement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$, de centres respectifs P, Q et R.
On note respectivement a, b, c, p, q et r les affixes des points A, B, C, P, Q et R dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.



1. (a) *Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$ on a : $p = \dfrac{a - \mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}}$.*
   (b) *Etablir des relations analogues pour q et r en raisonnant dans les deux autres carrés.*
   (c) *Montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.*
2. (a) *Montrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires.*
   (b) *Montrer que les droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes.*
   (c) *Soit H le point de concours de ces droites. Montrer que l'affixe h de H vérifie :*

$$\begin{cases}(r-p)\,\overline{h} + (\overline{r}-\overline{p})\,h = (r-p)\,\overline{a} + (\overline{r}-\overline{p})\,a\\ (q-p)\,\overline{h} + (\overline{q}-\overline{p})\,h = (q-p)\,\overline{b} + (\overline{q}-\overline{p})\,b\end{cases}$$

3. *On considère le polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + (7-2\mathrm{i})z - 7 - 6\mathrm{i}$.*
   (a) *Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.*
   (b) *Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$, $b = 1 - 2\mathrm{i}$ et $c = 4 + \mathrm{i}$. Donner, dans ce cas, les affixes des points P, Q et R définis ci-haut.*
   (c) *Déterminer alors l'affixe du point H.*

Solution.

Remarque : Le triangle ABC est quelconque.

1. (a) P est le centre du carré construit sur $[AB]$, donc le triangle APB est direct, rectangle et isocèle en P. Les affixes des sommets de ce triangle vérifient alors

$$\frac{p-a}{p-b} = \mathrm{i} \implies p - a = \mathrm{i}\,(p-b) \implies p - \mathrm{i}p = a - \mathrm{i}b \implies p = \frac{a-\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}}$$

   (b) On montre de façon analogue que

$$q = \frac{b - \mathrm{i}c}{1-\mathrm{i}} \qquad \text{et} \qquad r = \frac{c-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}$$

   (c) L'affixe du centre de gravité du triangle ABC est

$$\frac{a+b+c}{3}$$

   Celle du centre de gravité du triangle PQR est

$$\frac{p+q+r}{3} = \frac{a-\mathrm{i}b+b-\mathrm{i}c+c-\mathrm{i}a}{3(1-\mathrm{i})} = \frac{(1-\mathrm{i})(a+b+c)}{3(1-\mathrm{i})} = \frac{a+b+c}{3}$$

   Les deux triangle ont par la suite le même centre de gravité.

2. (a) On a

$$\frac{q-a}{p-r} = \frac{\dfrac{b-\mathrm{i}c}{1-\mathrm{i}} - a}{\dfrac{a-\mathrm{i}b}{1-\mathrm{i}} - \dfrac{c-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}} = \frac{b-\mathrm{i}c-a+\mathrm{i}a}{a-\mathrm{i}b-c+\mathrm{i}a} = \frac{\mathrm{i}(a-\mathrm{i}b-c+\mathrm{i}a)}{a-\mathrm{i}b-c+\mathrm{i}a} = \mathrm{i}$$

Par conséquent

$$\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{QA}\right)=\arg\left(\frac{q-a}{p-r}\right)=\arg\left(\mathrm{i}\right)=\frac{\pi}{2}\quad[2\pi]$$

D'où les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires.

(b) D'après la question précédente, (AQ) est la hauteur issue de Q dans le triangle PQR. On démontre de façon similaire que, dans ce même triangle, les droites (BR) et (CP) sont les hauteurs issues respectivement de R et P. Ainsi, le trois droites (AQ), (BR) et (CP) sont concourantes en l'orthocentre de PQR.

(c) On sait que (AH) (qui n'est autre que (AQ)) est perpendiculaire à (PR). Le rapport

$$\frac{h-a}{r-p}$$

est alors imaginaire pur. Par suite

$$\frac{h-a}{r-p}=-\overline{\left(\frac{h-a}{r-p}\right)}$$

c'est-à-dire que

$$(h-a)\left(\overline{r}-\overline{p}\right)=(r-p)\left(\overline{a}-\overline{h}\right)$$

d'où

$$(r-p)\,\overline{h}+\left(\overline{r}-\overline{p}\right)h=(r-p)\,\overline{a}+\left(\overline{r}-\overline{p}\right)a$$

La seconde relation se démontre de la même manière en considérant l'orthogonalité des droites (BH) et (QP).

L'affixe h de H satisfait alors bien aux relations :

$$\begin{cases}(r-p)\,\overline{h}+\left(\overline{r}-\overline{p}\right)h=(r-p)\,\overline{a}+\left(\overline{r}-\overline{p}\right)a\\(q-p)\,\overline{h}+\left(\overline{q}-\overline{p}\right)h=(q-p)\,\overline{b}+\left(\overline{q}-\overline{p}\right)b\end{cases}$$

3. (a) Le nombre $\mathrm{i}x$ ($x\in\mathbf{R}$) est une solution de l'équation $P(z)=0$ si et seulement si $P(\mathrm{i}x)=0$, ce qui est équivalent au fait que les parties réelle et imaginaire de $P(\mathrm{i}x)$ soient nulles. Mais nous avons

$$P(\mathrm{i}x)=(\mathrm{i}x)^3-5(\mathrm{i}x)^2+(7-2\mathrm{i})(\mathrm{i}x)-7-6\mathrm{i}=5x^2+2x-7+\mathrm{i}\left(-x^3+7x-6\right)$$

alors $\mathrm{i}x$ est une solution de l'équation $P(z)=0$ si et seulement si

$$\begin{cases}5x^2+2x-7=0\\-x^3+7x-6=0\end{cases}$$

Il est clair que $\mathbf{1}$ est une solution commune à ces deux équations (on pouvait résoudre la première équation et remplacer dans la deuxième par les solutions trouvées pour déterminer les solutions communes).

Ainsi i est une racine de P. Ce polynôme est par suite divisible par $(z-\mathrm{i})$. Pour factoriser P, soit on procède par identification ou par division euclidienne, soit on utilise un tableau de Hörner. Pour cet exemple, on choisit d'utiliser cette dernière méthode :

	1	-5	$7-2\mathrm{i}$	$-7-6\mathrm{i}$
i	$\downarrow$	i	$-1-5\mathrm{i}$	$7+6\mathrm{i}$
	1	$-5+\mathrm{i}$	$6-7\mathrm{i}$	0

Ainsi, $P(z)=(z-\mathrm{i})\left(z^2+(-5+\mathrm{i})z+6-7\mathrm{i}\right)$.

Pour trouver les autres solutions de l'équation $P(z)=0$, il suffit de résoudre

$$z^2+(-5+\mathrm{i})z+6-7\mathrm{i}=0$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta=(-5+\mathrm{i})^2-4(6-7\mathrm{i})=25-1-10\mathrm{i}-24+28\mathrm{i}=18\mathrm{i}=[3(1+\mathrm{i})]^2$$

Ses solutions sont

$$z_1 = \frac{5 - i - 3(1 + i)}{2} = 1 - 2i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{5 - i + 3(1 + i)}{2} = 4 + i$$

L'équation étudiée a pour solutions :

$$i,\ 1 - 2i \text{ et } 4 + i$$

(b) En remplaçant dans les expressions prouvées en **1. (a)** et **(b)**, par les valeurs de a, b et c, on obtient :

$$p = \frac{i - i(1 - 2i)}{1 - i} = \frac{-2}{1 - i} = \frac{-2(1 + i)}{2} = -1 - i$$

$$q = \frac{1 - 2i - i(4 + i)}{1 - i} = \frac{2 - 6i}{1 - i} = \frac{(2 - 6i)(1 + i)}{2} = 4 - 2i$$

$$r = \frac{4 + i - i^2}{1 - i} = \frac{5 + i}{1 - i} = \frac{(5 + i)(1 + i)}{2} = 2 + 3i$$

(c) On sait que l'affixe de H vérifie le système

$$\begin{cases} (r - p)\,\overline{h} + (\overline{r} - \overline{p})\,h = (r - p)\,\overline{a} + (\overline{r} - \overline{p})\,a \\ (q - p)\,\overline{h} + (\overline{q} - \overline{p})\,h = (q - p)\,\overline{b} + (\overline{q} - \overline{p})\,b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{(\overline{r} - \overline{p})\,h} + (\overline{r} - \overline{p})\,h = \overline{(\overline{r} - \overline{p})\,a} + (\overline{r} - \overline{p})\,a \\ \overline{(\overline{q} - \overline{p})\,h} + (\overline{q} - \overline{p})\,h = \overline{(\overline{q} - \overline{p})\,b} + (\overline{q} - \overline{p})\,b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\mathrm{Re}\left[(\overline{r} - \overline{p})\,h\right] = 2\mathrm{Re}\left[(\overline{r} - \overline{p})\,a\right] \\ 2\mathrm{Re}\left[(\overline{q} - \overline{p})\,h\right] = 2\mathrm{Re}\left[(\overline{q} - \overline{p})\,b\right] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\left[(\overline{r} - \overline{p})\,h\right] = \mathrm{Re}\left[(\overline{r} - \overline{p})\,a\right] \\ \mathrm{Re}\left[(\overline{q} - \overline{p})\,h\right] = \mathrm{Re}\left[(\overline{q} - \overline{p})\,b\right] \end{cases}$$

On pose $h = u + iv$ avec $(u\,,v) \in \mathbb{R}^2$. Alors le système précédent s'écrit :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left[(2 - 3i + 1 - i)\,(u + iv)\right] = \mathrm{Re}\left[(2 - 3i + 1 - i)\,i\right] \\ \mathrm{Re}\left[(4 + 2i + 1 - i)\,(u + iv)\right] = \mathrm{Re}\left[(4 + 2i + 1 - i)\,(1 - 2i)\right] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mathrm{Re}\left[(3 - 4i)\,(u + iv)\right] = \mathrm{Re}\left[4 + 3i\right] \\ \mathrm{Re}\left[(5 + i)\,(u + iv)\right] = \mathrm{Re}\left[7 - 9i\right] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3u + 4v = 4 \\ 5u - v = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3u + 4(5u - 7) = 4 \\ v = 5u - 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 23u = 32 \\ v = 5u - 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = \dfrac{32}{23} \\ v = -\dfrac{1}{23} \end{cases}$$

L'affixe de H est $h = \dfrac{32 - i}{23}$. □

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $-\mathrm{i}$ et i.

Soit f l'application de $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ dans $\mathcal{P}\setminus\{B\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}$.

1. *Montrer que f est une bijection et donner l'expression de f^{-1}.*
2. *On suppose $M \neq A$ et $M \neq B$.*
   - (a) *Montrer que $\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}\,,\overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$ et que $OM' = \dfrac{MB}{MA}$.*
   - (b) *Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que z' soit un réel non nul.*
   - (c) *Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ lorsque M' parcourt le cercle de centre O et de rayon 1.*
3. *Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(\mathrm{i}z+1)^3 = (z+\mathrm{i})^3$.*
   - (a) *Montrer que si z est une solution de (E) alors z est réel.*
   - (b) *Soit $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{\mathrm{i}+\tan\alpha}$. En déduire les valeurs de α pour lesquelles $\tan\alpha$ est une solution de (E).*
   - (c) *Résoudre cette équation en utilisant l'identité remarquable $a^3-b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.*
   - (d) *Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{5\pi}{12}$.*
4. *Soit θ un réel de l'intervalle $]0\,,2\pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\mathrm{i}z + 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} - e^{2\mathrm{i}\theta} = 0$.*
5. *On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = e^{\mathrm{i}\theta}$ et $z_2 = 2\mathrm{i} - e^{\mathrm{i}\theta}$.*
   - (a) *Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on précisera.*
   - (b) *Trouver les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie.*
   - (c) *Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1-\sin\theta)$. Déterminer la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale.*

Solution.

1. Il suffit de montrer que pour tout point $M'(z') \in \mathcal{P}\setminus\{B\}$, il existe un unique point $M(z) \in \mathcal{P}\setminus\{A\}$ tel que $M' = f(M)$. En d'autre terme, il suffit de montrer que pour tout $z' \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$, il existe un unique $z \in \mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ tel que $z' = \dfrac{\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}$.

   Soit $z' \in \mathbb{C}\setminus\{\mathrm{i}\}$. La condition précédente revient à montrer que dans $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ l'équation

   $$z' = \frac{\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}}$$

   d'inconnue z admet une unique solution.

   Résolvons alors cette équation :

   $$z' = \frac{\mathrm{i}z+1}{z+\mathrm{i}} \iff z'z + \mathrm{i}z' = \mathrm{i}z+1 \iff (z'-\mathrm{i})z = 1-\mathrm{i}z' \iff z = \frac{1-\mathrm{i}z'}{z'-\mathrm{i}}$$

   Elle a donc une seule solution (pour l'existence, remarquer que $z' \neq \mathrm{i}$). Il reste à vérifier que cette solution ne prends pas la valeur $-\mathrm{i}$. En effet,

   $$z = -\mathrm{i} \iff \frac{1-\mathrm{i}z'}{z'-\mathrm{i}} = -\mathrm{i} \iff 1-\mathrm{i}z' = -1-\mathrm{i}z' \iff 1 = -1$$

   ce qui est absurde.

   L'application f est bijective. Sa réciproque est l'application f^{-1} de $\mathcal{P}\setminus\{B\}$ dans $\mathcal{P}\setminus\{A\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{1-\mathrm{i}z}{z-\mathrm{i}}$.

2. (a) Vérifions d'abord que le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ est non nul (pour que l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right)$ soit défini).
Remarquons que $M \neq B$, alors

$$z \neq \mathrm{i} \implies z - \mathrm{i} \neq 0 \implies \mathrm{i}(z-\mathrm{i}) \neq 0 \implies \mathrm{i}z + 1 \neq 0 \implies z' \neq 0$$

d'où $M' \neq O$.
Par ailleurs, on a

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = \arg(z') = \arg\left(\frac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}\right) = \arg(\mathrm{i}) + \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \quad [2\pi]$$

et on a aussi

$$OM' = |z'| = \left|\frac{\mathrm{i}(z-\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}\right| = |\mathrm{i}| \left|\frac{z-z_B}{z-z_A}\right| = \frac{MB}{MA}$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
M(z) \in \Gamma &\iff z' \in \mathbb{R}^* \\
&\iff \arg(z') = 0 \quad [\pi] \\
&\iff \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = 0 \quad [\pi] \\
&\iff \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = 0 \quad [\pi] \\
&\iff \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad [\pi] \\
&\iff M \in \mathcal{C}_{[AB]} \setminus \{A, B\}
\end{aligned}$$

L'ensemble Γ est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

(c) On a

$$\begin{aligned}
M(z) \in \Delta &\iff M' \in \mathcal{C}_{(O,1)} \\
&\iff OM' = 1 \\
&\iff \frac{MB}{MA} = 1 \\
&\iff MB = MA \\
&\iff M \in \mathrm{med}[AB] = (Ox)
\end{aligned}$$

L'ensemble Δ est l'axe des abscisses.

3. (a) Si z est une solution de (E), alors

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}z+1)^3 = (z+\mathrm{i})^3 \\
\implies &|\mathrm{i}z+1|^3 = |z+\mathrm{i}|^3 \\
\implies &|\mathrm{i}(z-\mathrm{i})| = |z+\mathrm{i}| \\
\implies &|z-z_B| = |z-z_A| \\
\implies &MB = MA \qquad \text{(où } M \text{ est le point d'affixe } z) \\
\implies &M \in \mathrm{med}[AB] = (Ox) \\
\implies &z \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(b) Nous avons

$$\frac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{\mathrm{i}+\tan\alpha} = \frac{\dfrac{\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\mathrm{i}\dfrac{\cos\alpha - \mathrm{i}\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$\tan\alpha$ est une solution de (E) si et seulement si

$$(\mathrm{i}\tan\alpha+1)^3=(\tan\alpha+\mathrm{i})^3 \iff \left(\frac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{\mathrm{i}+\tan\alpha}\right)^3=1$$

en effet, $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\tan\alpha)=1\neq 0$, donc $\mathrm{i}+\tan\alpha\neq 0$. En remplaçant $\dfrac{1+\mathrm{i}\tan\alpha}{\mathrm{i}+\tan\alpha}$ par sa forme exponentielle, on trouve que $\tan\alpha$ est une solution de (E) si et seulement si

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(6\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}=1 \iff 6\alpha-\frac{3\pi}{2}=0\quad[2\pi] \iff \left(\exists k\in\mathbb{Z};\ \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)$$

Mais, α étant un élément de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, l'entier k est tel que

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}<\frac{\pi}{2} \iff -\frac{3}{4}<\frac{k}{3}<\frac{1}{4} \iff -\frac{9}{4}<k<\frac{3}{4} \iff k\in\{-2,-1,0\}$$

Ainsi, $\tan\alpha$ est une solution de (E) si et seulement si $\alpha=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{3}$ où $k\in\{-2,-1,0\}$, c'est-à-dire si

$$\alpha\in\left\{-\frac{5\pi}{12},-\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right\}$$

Remarque : Les solutions de (E) étant toutes réelles, donc chacune d'elles peut s'exprimer comme $\tan\alpha$ où $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ puisque la fonction $\tan$ est bijective de cet intervalle sur $\mathbb{R}$. On a ainsi résolu complètement l'équation (E).

(c)

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}z+1)^3=(z+\mathrm{i})^3\\
\iff&(\mathrm{i}z+1)^3-(z+\mathrm{i})^3=0\\
\iff&(\mathrm{i}z+1-z-\mathrm{i})\left(-z^2+1+2\mathrm{i}z+\mathrm{i}z^2-z+z+\mathrm{i}+z^2-1+2\mathrm{i}z\right)=0\\
\iff&((\mathrm{i}-1)z+1-\mathrm{i})\left(\mathrm{i}z^2+4\mathrm{i}z+\mathrm{i}\right)=0\\
\iff&\mathrm{i}(\mathrm{i}-1)(z-1)\left(z^2+4z+1\right)=0\\
\iff&(z-1)\left(z^2+4z+1\right)=0\\
\iff&\begin{cases}z-1=0 & (1)\\ z^2+4z+1=0 & (2)\end{cases}
\end{aligned}$$

L'équation (1) admet $z=1$ comme solution unique.
Le discriminant réduit de l'équation (2) est

$$\Delta'=2^2-1=3=\left(\sqrt{3}\right)^2$$

Les solutions de (2) sont

$$z_1=-2-\sqrt{3}\qquad\text{et}\qquad z_2=-2+\sqrt{3}$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3},1\right\}$$

(d) D'après la question **3. (b)**, $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)$ est la plus petite solution de (E) (ceci résulte de la croissance de la fonction $\tan$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$). On déduit alors de la question **3. (c)** que

$$\tan\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=-2-\sqrt{3}$$

et, puisque la fonction $\tan$ est impaire, on trouve :

$$\tan\frac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$$

4. Le discriminant réduit de l'équation

$$z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$$

est

$$\Delta' = (-i)^2 - 2ie^{i\theta} + e^{2i\theta} = -1 - 2ie^{i\theta} + e^{2i\theta} = \left(e^{i\theta} - i\right)^2$$

Elle a pour solutions

$$z_1 = i + \left(e^{i\theta} - i\right) = e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad z_2 = i - \left(e^{i\theta} - i\right) = 2i - e^{i\theta}$$

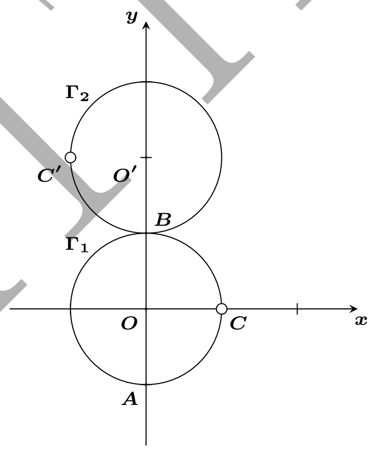
5. (a) L'affixe du milieu de $[M_1M_2]$ est

$$\frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{e^{i\theta} + 2i - e^{i\theta}}{2} = i = z_B$$

Les points M_1 et M_2 sont alors symétriques par rapport à B.

(b) On a

$$z_1 = e^{i\theta} \iff \begin{cases} |z_1| = 1 \\ \arg(z_1) = \theta \quad [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} OM_1 = 1 \\ \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_1}\right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$



Lorsque θ décrit $]0\,,2\pi[$, le point M_1 décrit le cercle Γ_1 de centre O et de rayon 1 privé du point C d'affixe 1 (qui correspond à $\theta = 0 \quad [2\pi]$). Le point M_2, étant symétrique de M_1 par rapport à B, décrit le cercle Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport à B privé du point $C' = S_B(C)$. C'est le cercle de centre $O'(2i)$ et de rayon 1 privé du point $C'(-1 + 2i)$.

(c) Nous avons

$$\begin{aligned}
(M_1M_2)^2 &= |z_2 - z_1|^2 \\
&= \left|2i - 2e^{i\theta}\right|^2 \\
&= 4\left|i - e^{i\theta}\right|^2 \\
&= 4\left|e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\theta}\right|^2 \\
&= 4\left|e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)\right|^2 \\
&= 4\left|2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right|^2 \\
&= 16\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \\
&= 8\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \\
&= 8\,(1 - \sin\theta)
\end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc M_1M_2 est maximale si et seulement $(M_1M_2)^2$ est maximale, soit encore si et seulement si $\sin\theta$ est minimale, c'est-à-dire si $\sin\theta = -1$. Ainsi, M_1M_2 est maximale si $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$. Dans ce cas, $M_1M_2 = 4$. □

— FIN —

■