Correction du devoir Amimaths

Niveau 7C du 11/02/2018

Correction proposée par Moctar Baba Hamdi

Exercice 1 :

$$35u - 96v = 1 \quad (E)$$

$$x^{35} \equiv 2 \quad [97] \quad (F)$$

1. a) 97 n'est divisible par aucun des nombres premiers inférieurs à $\sqrt{97}$, à savoir : 2, 3, 5 et 7. Donc, d'après le critère de primalité, 97 est un nombre premier.

b) On sait que : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 385 - 384 = 1$, ce qui signifie que le couple $(11,4)$ est une solution de (E).

c) Résolution de (E) :

Si (u, v) est une solution générale de (E), alors : $35u - 96v = 1$.

Et comme : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$. Alors par soustraction :

$$35(u - 11) - 96(v - 4) = 0$$

$$\Rightarrow 35(u - 11) = 96(v - 4) \quad (*)$$

Donc 96 divise $35(u - 11)$.

Mais vu que : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$, donc d'après Bézout, $PGCD(35,96) = 1$, d'où, d'après Gauss, 96 divise $(u - 11)$.

Donc il existe un entier relatif k tel que : $u - 11 = 96k$, c'est-à-dire que :

$$u = 96k + 11$$

En injectant cette valeur de u dans la relation $(*)$, on obtient :

$$35 \times 96k = 96(v - 4)$$

Ce qui implique que : $\quad v = 35k + 4$

Réciproquement :

Si $u = 96k + 11$ et $v = 35k + 4$ avec k un entier relatif, alors :

$$35u - 96v = 35 \times 96k + 35 \times 11 - 96 \times 35k - 96 \times 4 = 35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$$

Et ainsi l'ensemble des solutions de (E) est :

$$\boxed{S = \{(96k + 11, 35k + 4); k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. x est une solution de (F).

a) Prouvons que x et 97 sont premiers entre eux :

Supposons que x et 97 ne sont pas premiers entre eux, alors 97 divise x puisqu'il est premier. Et par suite, il divise x^{35}.

Mais x est une solution de (F), ce qui veut dire que 97 divise $\left(x^{35} - 2\right)$.

Donc 97 divise $x^{35} - \left(x^{35} - 2\right) = 2$, ce qui est absurde.

Ainsi, x et 97 sont premiers entre eux.

b) Montrons que $x^{96} \equiv 1 \quad [97]$ puis que $x \equiv 2^{11} \quad [97]$

x et 97 sont premiers entre eux. Donc d'après Fermat :

$$x^{96} \equiv 1 \quad [97]$$

Et comme $(11,4)$ est une solution de (E), donc : $35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$, c'est-à-dire que : $35 \times 11 = 1 + 96 \times 4$, d'où :

$$x^{1+96\times4} \equiv x^{35\times11} \quad [97]$$

$$\Rightarrow x \times (x^{96})^4 \equiv \left(x^{35}\right)^{11} \quad [97] \quad (*)$$

Mais vu que : $x^{96} \equiv 1 \quad [97]$ et $x^{35} \equiv 2 \quad [97]$ (car x est une solution de (F)), alors $(*)$ entraîne que :

$$x \equiv 2^{11} \quad [97]$$

3. n est un entier relatif. Montrons que si $n \equiv 2^{11} \quad [97]$, alors n est solution de (F) :

$$n \equiv 2^{11} \quad [97]$$

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2^{11\times35} \quad [97]$$

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2^{1+96\times4} \quad [97]$$

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2 \times (2^{96})^4 \quad [97]$$

Mais $2^{96} \equiv 1 \quad [97]$ car 2 et 97 sont premiers entre eux, donc :

$$\Rightarrow n^{35} \equiv 2 \quad [97]$$

Ce qui signifie que n est une solution de (F).

4. Montrons que les solutions de (F) sont tous les entiers $x = 11 + 97k$ où $k \in \mathbb{Z}$:

On a prouvé, dans les questions 2. et 3., que x est une solution de (F) si, et seulement si $x \equiv 2^{11} \quad [97]$.

Et vu que : $2^{11} = 2048 = 97 \times 21 + 11$, donc : $2^{11} \equiv 11 \quad [97]$, alors : x est une solution de (F) si, et seulement si $x \equiv 11 \quad [97]$. Autrement dit, les solutions de (F) sont tous les entiers $x = 11 + 97k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$$

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\cos x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

a) Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculons $f'(x)$:

On sait que :

- Pour tout $t \in [-1,1], 1 - t^2 \geq 0$, donc la fonction $g: t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et par suite la fonction $G: x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, est bien définie et dérivable sur cet intervalle.

- La fonction $h: x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1,1]$.

Donc $f = G \circ h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables, et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = h'(x)G'\big(h(x)\big) = h'(x)g\big(h(x)\big) = -(\sin x)\sqrt{1-(\cos x)^2} = -(\sin x)\sqrt{(\sin x)^2} \\ = -(\sin x)|\sin x| \end{aligned}$$

b) Déterminons $f(x)$ pour $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et déduisons la valeur de I_0 :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], \sin x \geq 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f'(x) = -(\sin x)^2 = (\cos x)^2 - 1 = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) - 1$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 2x - 1)$$

Donc, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right) + c$$

Et comme :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\cos\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^0 \sqrt{1-t^2}\,dt = 0$$

Alors :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\pi - \frac{\pi}{2}\right) + c = 0$$

D'où :

$$c = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\right) + \frac{\pi}{4}$$
$$\forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right], f(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}$$

D'autre part :

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt = \int_0^{\cos 0} \sqrt{1-t^2}\,dt = f(0) = \frac{\pi}{4}$$

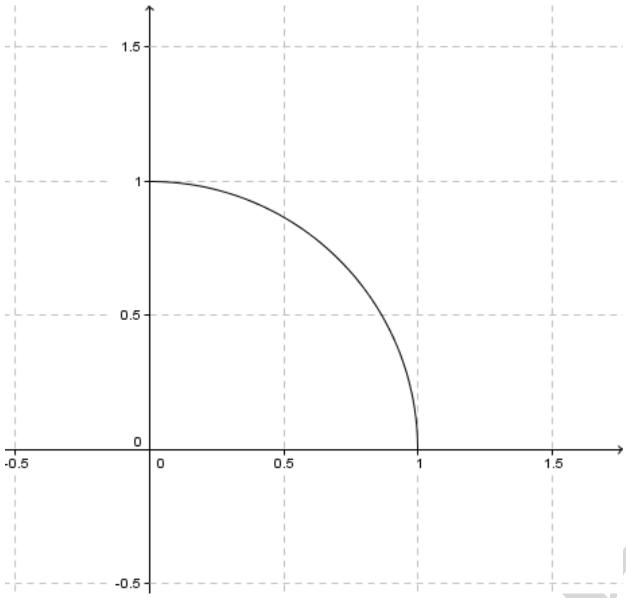
c) Interprétation graphique de I_0 et calcul de sa valeur :

I_0 est l'aire du domaine plan délimité par les axes de coordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe de la fonction $g: t \mapsto \sqrt{1-t^2}$.

Un point M(x,y) appartient à la courbe de la fonction $g: t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ si et seulement si $y = g(x)$ soit $y = \sqrt{1-x^2}$

Alors: $y \geq 0$ *et* $x^2 + y^2 = 1$, donc ce domaine est un quart de disque de rayon 1, d'où :

$$I_0 = \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}$$



2. a) Montrons que la suite (I_n) est décroissante et minorée :

On a :

$$\forall t \in [0,1], 0 \leq t \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall t \in [0,1], 0 \leq t\sqrt{1-t^2} \leq \sqrt{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \ 0 \leq \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}dt \leq \int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$$

$$\Rightarrow \ 0 \leq I_1 \leq I_0$$

Et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], 0 \leq t^{n+1}\sqrt{1-t^2} \leq t^n\sqrt{1-t^2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1-t^2}dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

D'où la suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, et par suite elle est convergente.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, et déduisons $\lim_{n\to+\infty} I_n$:

On a :

$$I_0 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le I_0 \le 1$$

Et :

$$\forall t \in [0,1], 0 \le \sqrt{1-t^2} \le 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1], 0 \le t^n\sqrt{1-t^2} \le t^n$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le \int_0^1 t^{\mathrm{n}}\sqrt{1-t^2}dt \le \int_0^1 t^{\mathrm{n}}dt$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le \int_0^1 t^{\mathrm{n}}\sqrt{1-t^2}dt \le \frac{1}{\mathrm{n}+1}[t^{n+1}]_0^1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

3. a) Calculons I_1 :

$$I_1 = \int_0^1 \mathrm{t}\sqrt{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 (-2\mathrm{t})\sqrt{1-t^2}dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} I_n$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+2} = \int_0^1 t^{\mathrm{n}+2}\sqrt{1-t^2}dt$$

Effectuons une intégration par parties :

En posant : $\begin{cases} u(t) = t^{\mathrm{n}+1} \\ v'(t) = \mathrm{t}\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

On obtient $\begin{cases} u'(t) = (n+1)t^{\mathrm{n}} \\ v(t) = -\frac{1}{3}(1-t^2)\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Donc :

$$I_{n+2} = -\frac{1}{3}\left[t^{\mathrm{n}+1}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 + \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^{\mathrm{n}}(1-t^2)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= \frac{n+1}{3}\left(\int_0^1 t^{\mathrm{n}}\sqrt{1-t^2}\,dt - \int_0^1 t^{\mathrm{n}+2}\sqrt{1-t^2}\,dt\right) = \frac{n+1}{3}(I_n - I_{n+2})$$

$$\Rightarrow 3I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$\Rightarrow (\mathrm{n}+4)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}I_n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}I_n$$

c) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+4} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, **et déduisons** $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$ **:**

(I_n) **est décroissante donc :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n \quad (*)$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$ **:**

- Initialisation : $I_0 = \frac{\pi}{4} > 0$ **et** $I_1 = \frac{1}{3} > 0$, **donc la propriété est vraie pour** $n \in \{0, 1\}$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, **supposons que :** $I_n > 0$ **et** $I_{n+1} > 0$ **et montrons que :** $I_{n+2} > 0$ **:**

D'après la question précédente et l'hypothèse de la récurrence :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+4}I_n > 0$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$.

En divisant, dans $(*)$, **par** I_n **qui est strictement positif, on obtient :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

Et, utilisant la question précédente, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+4} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

Mais : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+4} = 1$

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

4. a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$:

- Initialisation : $I_0 \times I_1 = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2(0+1)(0+2)(0+3)}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$ et montrons que : $I_{n+1} \times I_{n+2} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$:

D'après la question 3. b) et l'hypothèse de la récurrence :

$$\begin{aligned} I_{n+1} \times I_{n+2} &= \frac{n+1}{n+4} I_n \times I_{n+1} = \frac{n+1}{n+4} \times \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \times I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$.

b) Prouvons que $\lim_{n \to +\infty} n\sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$:

Comme $\forall n \in \mathbb{N}, I_n > 0$, alors :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, n\sqrt{n} I_n = \sqrt{n^3 {I_n}^2} &= \sqrt{n^3 I_n \times I_{n+1} \times \frac{I_n}{I_{n+1}}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2} \times \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} \times \frac{I_n}{I_{n+1}}} \end{aligned}$$

Et vu que :

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \frac{n^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 1 \\ \lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} n\sqrt{n} I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

5. Montrons que $I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+2}n!(n+1)!}$ et déduisons l'expression de I_{2n+1} :

- Initialisation : $I_0 = \frac{\pi}{4} = \frac{(2\times 0)!\pi}{2^{2\times 0+2}\times 0!\times(0+1)!}$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+2}n!(n+1)!}$ et montrons que : $I_{2n+2} = \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2n+4}(n+1)!(n+2)!}$:

D'après la question 3. b) et l'hypothèse de la récurrence :

$$\begin{aligned} I_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+4} I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+4} \times \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+2}n!\,(n+1)!} \\ &= \frac{2n+2}{2(n+1)} \times \frac{2n+1}{2(n+2)} \times \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+2}n!\,(n+1)!} = \frac{(2n+2)!\pi}{2^{2n+4}(n+1)!\,(n+2)!} \end{aligned}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+2}n!(n+1)!}$.

D'autre part, d'après la question 4. a), on a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, I_{2n+1} &= \frac{\pi}{2(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \times \frac{1}{I_{2n}} = \\ &= \frac{\pi}{2(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \times \frac{2^{2n+2}n!\,(n+1)!}{(2n)!\,\pi} = \frac{2^{2n+1}n!\,(n+1)!}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

Exercice 3 :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}, f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

1. a) Montrons que l'équation $f(z) = z$ admet une solution imaginaire pure z_0 :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ \dfrac{iz-1}{(z+1)^2} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ iz-1 = z(z+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ iz-1 = z(z^2+2z+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ iz-1 = z^3+2z^2+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ z^3+2z^2+(1-i)z+1 = 0 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $z_0 = ix$ est une solution de l'équation $f(z) = z$ si, et seulement si :

$$(ix)^3 + 2(ix)^2 + (1-i)(ix) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -ix^3 - 2x^2 + (1+i)x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 + (x - x^3)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + x + 1 = 0 \\ x - x^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(2x+1)(x-1) = 0 \\ x(1-x)(1+x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow z_0 = i$$

b) Résolution de l'équation $f(z) = z$:

On sait que :

$$f(z) = z \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 = 0 \end{cases}$$

On pose : $P(z) = z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1$.

D'après la question précédente $P(i) = 0$, ce qui montre que $z_0 = i$ est une racine de P, et que $P(z)$ est factorisable par $(z-i)$.

Utilisons le tableau d'Hörner pour factoriser $P(z)$:

	1	2	$1-i$	1
i	$\downarrow$	i	$-1+2i$	-1
	1	$2+\mathrm{i}$	i	0

Ainsi :

$$\boxed{P(z) = (z-i)(z^2 + (2+\mathrm{i})z + \mathrm{i})}$$

Donc :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - i = 0 \quad (1) \\ ou \\ z^2 + (2+\mathrm{i})z + \mathrm{i} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

L'équation $(1) \Leftrightarrow z = i$.

Le discriminant de l'équation (2) est :

$$\Delta = (2+i)^2 - 4i = 4 - 1 + 4i - 4i = 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2$$

Ses solutions sont alors :

$$\begin{cases} z' = \dfrac{-2 - \mathrm{i} - \sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2 - \sqrt{3} - \mathrm{i}}{2} \\ z'' = \dfrac{-2 - \mathrm{i} + \sqrt{3}}{2} = \dfrac{-2 + \sqrt{3} - \mathrm{i}}{2} \end{cases}$$

Comme : $\mathrm{Re}(z') = \frac{-2-\sqrt{3}}{2} < \frac{-2+\sqrt{3}}{2} = \mathrm{Re}(z'')$**, alors l'ensemble des solutions de l'équation** $f(z) = z$ **est (avec les notations de l'énoncé) :**

$$\boxed{S = \left\{z_0 = i, z_1 = \frac{-2+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}, z_2 = \frac{-2-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2}\right\}}$$

2. a) Montrons que $1 + z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}}$ **et** $1 + z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$ **:**

On a :

$$1 + z_1 = 1 + \frac{-2+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \frac{2-2+\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}}$$

Et :

$$1 + z_2 = 1 + \frac{-2-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \frac{2-2-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = \frac{-\sqrt{3}-\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$$

b) Déduisons le module et un argument de chacun des complexes z_1 **et** z_2 **:**

On a :

$$1 + z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}} \Leftrightarrow z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{6}} - 1 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{11\pi}{12}}\right)\mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{12}} = 2i\sin\frac{11\pi}{12}\mathrm{e}^{i\frac{11\pi}{12}}$$

$$= 2\sin\frac{11\pi}{12}\mathrm{e}^{i\frac{17\pi}{12}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = 2\sin\frac{11\pi}{12} \\ \arg(z_1) = \frac{17\pi}{12} \quad [2\pi] \end{cases}$$

car : $0 < \frac{11\pi}{12} < \pi \Rightarrow \sin\frac{11\pi}{12} > 0.$

De même :

$$1 + z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}} \Leftrightarrow z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}} - 1 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}\right)\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} = 2i\sin\frac{7\pi}{12}\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} = 2\sin\frac{7\pi}{12}\mathrm{e}^{i\frac{13\pi}{12}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = 2\sin\frac{7\pi}{12} \\ \arg(z_1) = \frac{13\pi}{12} \quad [2\pi] \end{cases}$$

car : $0 < \frac{7\pi}{12} < \pi \Rightarrow \sin\frac{7\pi}{12} > 0.$

3. $z = e^{i\alpha}, 0 \le \alpha < \pi.$

a) Montrons que $\overline{f(z)} = izf(z)$:

On sait que : $\bar{z} = e^{-i\alpha} = \frac{1}{z}$, donc :

$$\overline{f(z)} = \frac{i\bar{z} - 1}{(\bar{z}+1)^2} = \frac{-\frac{i}{z}-1}{\left(\frac{1}{z}+1\right)^2} = z^2\frac{-\frac{i}{z}-1}{(z+1)^2} = z\frac{-i-z}{(z+1)^2} = iz\frac{iz-1}{(z+1)^2} = izf(z)$$

b) Déterminons α pour que $f(z)$ soit imaginaire pur :

$$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{f(z)} = -f(z) \Leftrightarrow izf(z) = -f(z) \Leftrightarrow (1+iz)f(z) = 0 \Leftrightarrow (1+iz)\frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+iz = 0 \\ \text{ou} \\ iz-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ \text{ou} \\ z = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

L'autre solution étant rejetée car $0 \le \alpha < \pi$.

b) Ecrivons $f(z)$ sous forme exponentielle :

$$f(z) = f(e^{i\alpha}) = \frac{ie^{i\alpha}-1}{(e^{i\alpha}+1)^2} = \frac{e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}-1}{4\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 e^{i\alpha}} = \frac{2i\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{4\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 e^{i\alpha}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

C'est la forme exponentielle de $f(z)$ car :

$$0 \le \alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

4. Déterminons z tel que $|z| = 1$ et $\mathrm{Re}\big(f(z)\big) = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ \mathrm{Re}\big(f(z)\big) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi, \pi[; z = e^{i\alpha} \\ \mathrm{Re}\big(f(z)\big) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \mathrm{Re}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = \left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(1-\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ 4\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\pi}{3} \quad [\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in]-\pi,\pi[; z = \mathrm{e}^{i\alpha} \\ \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z \in \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

Exercice 4 :

f est la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\frac{2\sin x}{1-\sin x}=\frac{2}{1-\sin x}-2$$

(Γ) est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Etude des variations de f :

- Limites aux bornes :

$$f(0)=0$$

$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{2}{1-\sin x}-2\right)=+\infty$ car $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}(1-\sin x)=0^+$

- Calcul de la dérivée :

f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[, f'(x)=\frac{-2(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=\frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}>0$$

- Tableau de variation de f :

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. a) Montrons que f admet une réciproque g et déterminons $g(0)$ et $g(2)$:

f est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc elle réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right)=[0,+\infty[$, et par suite elle admet une réciproque g.

$$f(0)=0\Leftrightarrow g(0)=0$$

$$g(2)=a\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ f(a)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{2\sin a}{1-\sin a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ \sin a=1-\sin a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ \sin a=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$$

Donc :

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{2}) = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{6}}$$

b) $\boldsymbol{h(x) = f(x) - x}$**. Montrons que** $\boldsymbol{h''(x) = \frac{2(2+\sin x)}{(1-\sin x)^2}}$ **et déduisons le signe de** $\boldsymbol{h'(x)}$ **et de** $\boldsymbol{h(x)}$ **:**

On a :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2} - 1$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, h''(x) &= \frac{-2\sin x\,(1-\sin x)^2 + 4(\cos x)^2(1-\sin x)}{(1-\sin x)^4} \\
&= \frac{-2\sin x\,(1-\sin x)^2 + 4(1-(\sin x)^2)(1-\sin x)}{(1-\sin x)^4} \\
&= \frac{-2\sin x\,(1-\sin x)^2 + 4(1+\sin x)(1-\sin x)^2}{(1-\sin x)^4} \\
&= \frac{-2\sin x + 4(1+\sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2(2+2\sin x - \sin x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2(2+\sin x)}{(1-\sin x)^2} > 0
\end{aligned}$$

Ceci montre que $\boldsymbol{h'}$ **est strictement croissante sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$**, et par conséquent :**

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, h'(x) \geq h'(0) = 1 > 0$$

Ce qui entraîne que $\boldsymbol{h}$ **est strictement croissante sur** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$**, et par suite :**

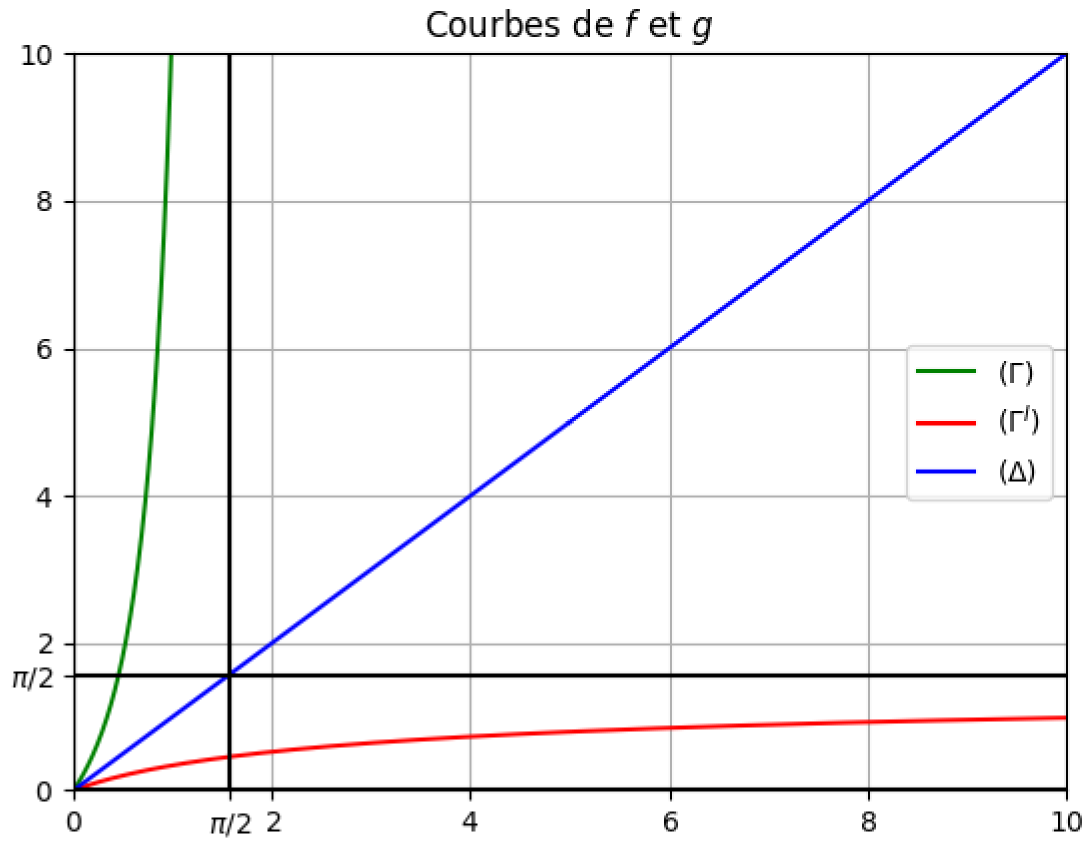
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[, h(x) \geq h(0) = 0$$

c) Position relative de la courbe (Γ) **par rapport à la droite** (Δ) **d'équation** $\boldsymbol{y = x}$ **:**

x	0		$\pi/2$
$h(x) = f(x) - x$	0	$+$	
$P.R.$	$\cap$	$(\Gamma)/(\Delta)$	

d) Tracé des courbes de $\boldsymbol{f}$ **et** $\boldsymbol{g}$ **:**

$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty \Rightarrow$ **la droite d'équation** $\boldsymbol{y = \frac{\pi}{2}}$ **est A.V. à** $(\boldsymbol{\Gamma})$**.**



e) Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$:

f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, donc sa réciproque g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{(1-\sin(g(x)))^2}{2\cos(g(x))} \quad (*)$$

Mais pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} & f(g(x)) = x \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{1-\sin(g(x))} - 2 = x \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{1-\sin(g(x))} = x + 2 \\ \Leftrightarrow & 1 - \sin(g(x)) = \frac{2}{x+2} \quad (1) \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sin(g(x)) = 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$$

$$\Rightarrow \left(\sin\left(g(x)\right)\right)^2 = \frac{x^2}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\cos\left(g(x)\right)\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{(x+2)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(g(x)\right) = \frac{2\sqrt{x+1}}{x+2} \quad (2)$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}_+, g(x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui implique que $\cos\left(g(x)\right) > 0$.

En injectant (1) et (2) dans $(*)$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = \frac{\frac{4}{(x+2)^2}}{\frac{4\sqrt{x+1}}{x+2}} = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$$

3.

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

a) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$:

- Initialisation : $u_0 = 2 \in [0,2]$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq u_n \leq 2$ et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 2$:

Comme g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$0 = g(0) \leq g(u_n) = u_{n+1} \leq g(2) = \frac{\pi}{6} \leq 2$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 2$.

b) Montrons que la suite (u_n) est décroissante et déduisons qu'elle est convergente :

Raisonnons par récurrence :

- Initialisation : $u_0 = 2, u_1 = g(2) = \frac{\pi}{6}$, donc $u_1 \leq u_0$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $u_{n+1} \leq u_n$ et montrons que : $u_{n+2} \leq u_{n+1}$:

Comme g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc :

$$u_{n+2} = g(u_{n+1}) \leq g(u_n) = u_{n+1}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

Donc (u_n) est décroissante et minorée par 0, ce qui montre qu'elle est convergente.

Soit l la limite de (u_n), donc $l \in [0,2]$ et comme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$$

Alors :

$$l = g(l) \Leftrightarrow f(l) = l \Leftrightarrow h(l) = 0 \Leftrightarrow l = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

4.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n\left(g\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - g\left(u_n + \frac{1}{n}\right)\right)$$

On admet que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in \left]u_n + \frac{1}{n}, u_n + \frac{2}{n}\right[$ tel que $v_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$.

(On pourra prouver ceci en appliquant le théorème des accroissements finis (Hors programme)).

Montrons que (v_n) est convergente et calculons sa limite :

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n + \frac{1}{n} < c_n < u_n + \frac{2}{n}$$

Comme :

$$\lim_{n \to +\infty}\left(u_n + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty}\left(u_n + \frac{2}{n}\right) = 0$$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$$

Ce qui montre que (v_n) est convergente et que :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2}$$