République Islamique de Mauritanie
Ministère de l'Education Nationale et de la Réforme du Système Educatif
Commission Nationale pour les Mathématiques et les Sciences (MEWAHIB)

Olympiades Nationales de Mathématiques 2025

1er tour | **Niveau 4AS** | **26 janvier 2025**
Durée 3 h

Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1 (25 points)

Dans un groupe de 6 hommes. Si on calcule les sommes de leurs âges cinq à cinq on obtient les résultats suivants : 182, 174, 184, 175, 188 et 172.
Déterminer l'âge de l'homme le plus âgé de ce groupe.

Corrigé

Soit a, b, c, d, e et f les âges des membres du groupe, tels que $a<b<c<d<e<f$. Soit

$S=a+b+c+d+e+f$

Si on additionne les âges de ces membres cinq à cinq on obtient les sommes (rangées par ordre croissant) suivantes : 172 ; 174 ; 175 ; 182 ; 184 et 188.

Ces âges vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} S-a=188 \\ S-b=184 \\ S-c=182 \\ S-d=175 \\ S-e=174 \\ S-f=172 \end{cases}$$

Barème	
Une solution complète	25pts
Mise en équation (ligne 1&2)	6pts
Equations du système	6pts
Somme S	5pts
âge du plus âgé	5pts
Idées et Présentation	3pts

En additionnant ces équations membre à membre on obtient

$6S-(a+b+c+d+e+f)=188+184+182+175+174+172$

$5S=1075 \Rightarrow S=215$

L'âge de l'homme le plus âgé de ce groupe est $f=S-172=275-172=43$.

Exercice 2 (25 points)

1) Déterminer les entiers naturels a et b tels que $n(n+3)+2=(n+a)(n+b)$ et $a<b$.

2) Déduire la valeur du nombre $z=\dfrac{(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2).....(100\times103+2)}{(5\times8+2)(7\times10+2)(9\times12+2)....(99\times102+2)}$

3) Déterminer la valeur de l'entier naturel n tel que :

$$\frac{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2).....((2n+1)\times(2n+4)+2)}{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)....((2n+2)\times(2n+5)+2)}=\frac{1}{2025}$$

Corrigé

1) $n(n+3)+2=(n+a)(n+b)$ avec $a<b$

$$\begin{aligned} n(n+3)+2 &= n^2+3n+2 \\ &= n^2+2n+n+2 \\ &= n(n+2)+1(n+2) \\ &= (n+1)(n+2) \end{aligned}$$

Donc $a=1$ et $b=2$

Barème	
Une solution complète	25pts
1) calcul de a et b	6pts
2) utilisation de la question 1)	4pts
Valeur de Z	4pts
3) Membre gauche $=\frac{2}{2n+4}$	4pts
Valeur de n	4pts
Idées et Présentation	3pts

2) Calculons $z=\dfrac{(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2).....(100\times103+2)}{(5\times8+2)(7\times10+2)(9\times12+2)....(99\times102+2)}$

Soit $A=(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2).....(100\times103+2)$ **et**

$B=(5\times8+2)(7\times10+2)(9\times12+2)....(99\times102+2)$ **, Donc** $z=\dfrac{A}{B}$

On a montré que pour tout entier naturel n : $n(n+3)+2=(n+1)(n+2)$**, alors**

D'une part :

Pour $n=4$**, on a** $4(4+3)+2=(4+1)(4+2)\Rightarrow 4\times7+2=5\times6$

Pour $n=6$**, on a** $6(6+3)+2=(6+1)(6+2)\Rightarrow 6\times9+2=7\times8$

Pour $n=8$**, on a** $8(8+3)+2=(8+1)(8+2)\Rightarrow 8\times11+2=9\times10$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Pour $n=100$**, on a** $100(100+3)+2=(100+1)(100+2)\Rightarrow 100\times103+2=101\times102$

En multipliant les égalités précédentes on obtient ;

$$\boxed{A=5\times6\times7\times8\times\ldots\times101\times102}$$

D'autre part :

Pour $n=5$**, on a** $5(5+3)+2=(5+1)(5+2)\Rightarrow 5\times8+2=6\times7$

Pour $n=7$**, on a** $7(7+3)+2=(7+1)(7+2)\Rightarrow 7\times10+2=8\times9$

Pour $n=9$**, on a** $9(9+3)+2=(9+1)(9+2)\Rightarrow 9\times12+2=10\times11$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Pour $n=99$**, on a** $99(99+3)+2=(99+1)(99+2)\Rightarrow 99\times102+2=100\times101$

En multipliant les égalités précédentes on obtient ;

$$\boxed{B=6\times7\times8\times9\times\ldots\times100\times101}$$

Alors $z=\dfrac{A}{B}=\dfrac{5\times6\times7\times8\times\ldots\times101\times102}{6\times7\times8\times\times9\ldots\times100\times101}$ **donc** $z=5\times102=510$

3) Déterminons la valeur de l'entier naturel n tel que :

$$\frac{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2).....((2n+1)\times(2n+4)+2)}{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)....((2n+2)\times(2n+5)+2)}=\frac{1}{2025}$$

D'après la question n° 1

$$(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2)\times\ldots\times((2n+1)\times(2n+4)+2)=2\times3\times4\times5\times\ldots\times(2n+2)(2n+3)$$

$$(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)\times\ldots\times((2n+2)\times(2n+5)+2)=3\times4\times5\times6\times\ldots\times(2n+3)\times(2n+4)$$

D'où

$$\frac{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2).....((2n+1)\times(2n+4)+2)}{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)....((2n+2)\times(2n+5)+2)}=\frac{2\times3\times4\times5\times\ldots\times(2n+2)(2n+3)}{3\times4\times5\times6\times\ldots\times(2n+3)\times(2n+4)}=\frac{2}{2n+4}$$

Donc $\dfrac{2\times3\times4\times5\times\ldots\times(2n+2)(2n+3)}{3\times4\times5\times6\times\ldots\times(2n+3)\times(2n+4)}=\dfrac{1}{2025}\Rightarrow\dfrac{2}{2n+4}=\dfrac{1}{2025}$

$\Rightarrow 2n+4=4050\Rightarrow 2n=4046\Rightarrow n=2023$

Exercice 3 (25 points)

Soit x, y et z des réels strictement positifs

1) Montrer que $x^2+y^2 \geq 2xy$

2) Montrer que $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+x^2} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

Corrigé

Soit x, y et z des réels strictement positifs

Barème :	
Une solution complète	25pts
1) $x^2+y^2 \geq 2xy$	6pts
2) Transformation de l'écriture	5pts
Utilisation de $x^2+y^2 \geq 2xy$ 1)	5pts
Résultat	6pts
Idées et présentation	3pts

1) Montrons que $x^2+y^2 \geq 2xy$

On a $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2xy$

Autre méthode : d'après l'inégalité arithmétiquo-géométrique (AM-GM) on a $x^2+y^2 \geq 2\sqrt{x^2.y^2}=2|xy|=2xy$

2) Montrons que $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+x^2} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

$$\frac{x^3}{x^2+y^2}+\frac{y^3}{y^2+z^2}+\frac{z^3}{z^2+x^2}=\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}-\frac{xy^2}{x^2+y^2}+\frac{y^3+yz^2}{y^2+z^2}-\frac{yz^2}{y^2+z^2}+\frac{z^3+zx^2}{z^2+x^2}-\frac{zx^2}{z^2+x^2}$$

$$=\frac{x\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}+\frac{y\left(y^2+z^2\right)}{y^2+z^2}+\frac{z\left(z^2+x^2\right)}{z^2+x^2}-\frac{xy^2}{x^2+y^2}-\frac{yz^2}{y^2+z^2}-\frac{zx^2}{z^2+x^2}$$

$$=x+y+z-\frac{xy^2}{x^2+y^2}-\frac{yz^2}{y^2+z^2}-\frac{zx^2}{z^2+x^2}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geq 2xy \\ y^2+z^2 \geq 2yz \\ z^2+x^2 \geq 2zx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2xy} \\ \dfrac{1}{y^2+z^2} \leq \dfrac{1}{2yz} \\ \dfrac{1}{z^2+x^2} \leq \dfrac{1}{2zx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{xy^2}{2xy} \\ \dfrac{yz^2}{y^2+z^2} \leq \dfrac{yz^2}{2yz} \\ \dfrac{zx^2}{z^2+x^2} \leq \dfrac{zx^2}{2zx} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{y}{2} \\ \dfrac{yz^2}{y^2+z^2} \leq \dfrac{z}{2} \\ \dfrac{zx^2}{z^2+x^2} \leq \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{xy^2}{x^2+y^2}+\frac{yz^2}{y^2+z^2}+\frac{zx^2}{z^2+x^2} \leq \frac{x+y+z}{2} \Rightarrow -\frac{xy^2}{x^2+y^2}-\frac{yz^2}{y^2+z^2}-\frac{zx^2}{z^2+x^2} \geq -\frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+z-\frac{xy^2}{x^2+y^2}-\frac{yz^2}{y^2+z^2}-\frac{zx^2}{z^2+x^2} \geq x+y+z-\frac{x+y+z}{2}$$

$$\Rightarrow x+y+z-\frac{xy^2}{x^2+y^2}-\frac{yz^2}{y^2+z^2}-\frac{zx^2}{z^2+x^2} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

Donc $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+x^2} \geq \dfrac{x+y+z}{2}$

Exercice 4 (25 points)

PQRS est un carré et I est le milieu de $[QR]$.

Les droites (PI) et (SQ) se coupent en J.

1) Justifier que $\text{Aire}(PQR)=2\times\text{Aire}(PQI)$ **et** $\text{Aire}(PQJ)=\text{Aire}(QRJ)$

2) Sachant que l'aire du triangle PQJ est $10\ cm^2$,

a) Calculer l'aire du quadrilatère RSJI.

b) Calculer l'aire du carré PQRS.

Corrigé

Barème :

Une solution complète	**25pts**
1) $\mathrm{Aire(PQR)} = 2\times \mathrm{Aire(PQI)}$	**5pts**
$\text{Aire de (QRJ)} = \frac{1}{2}\mathrm{QJ}\times \mathrm{RO}$	**5pts**
2.a) $\mathrm{Aire(RSJI)} = 25$	**7pts**
b) aire du carré	**5pts**
Idées et présentation	**3pts**

1) Le point I étant le milieu du segment $[QR]$

alors $QR = 2\times QI \Rightarrow \frac{QR\times PQ}{2} = 2\times\frac{QI\times PQ}{2}$**, d'où**

$\mathrm{Aire(PQR)} = 2\times \mathrm{Aire(PQI)}$

Soit O le centre du carré.

- **D'une part, $[RO]$ est la hauteur issue de R dans le triangle QRJ ; donc**

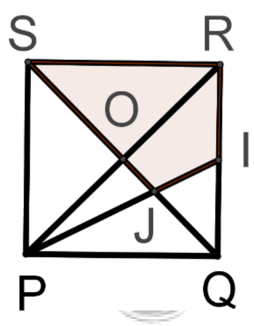
$\text{Aire de (QRJ)} = \frac{1}{2}QJ\times RO$

- **D'autre part, $[PO]$ est la hauteur issue de P dans le triangle PQJ, donc**

$\text{Aire de (PQJ)} = \frac{1}{2}QJ\times PO$

Or $PO = RO$**. Alors** $\mathrm{Aire(PQJ)} = \mathrm{Aire(QRJ)}$

2.a) $\mathrm{Aire(QRJ)} = \mathrm{Aire(PQJ)} = 10$



La droite (JI) est la médiane issue de J dans le triangle QRJ, donc :

$\mathrm{Aire(JIQ)} = \mathrm{Aire(JIR)} = \frac{1}{2}\mathrm{Aire(QRJ)} = \frac{10}{2} = 5$

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire(RSJI)} &= \mathrm{Aire(SRI)} + \mathrm{Aire(SIJ)}\\ &= \mathrm{Aire(PQI)} + \mathrm{Aire(SIQ)} - \mathrm{Aire(QIJ)}\\ &= 15+15-5 = 25\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{b) } \mathrm{Aire(SQR)} &= 2\times \mathrm{Aire(SRI)}\\ &= 2\times\left[\mathrm{Aire(RSJI)} + \mathrm{Aire(QIJ)}\right]\\ &= 2\times(25+5) = 60\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le fait que $\mathrm{Aire(PQI)} = \frac{1}{2}PQ\times QI = \frac{1}{2}PQ\times\frac{PQ}{2} = \frac{1}{4}PQ^2$

Et puisque $\mathrm{Aire(PQI)} = 15$ **alors** $PQ^2 = 60$ **donc l'aire du carré PQRS est 60**

Fin.