Olympiades Nationales de Mathématiques 2025

1er tour — Niveau 7C — 26 janvier 2025

Corrigé proposé par AMIMATHS

Exercice 1 (25 points)

Lors de la cérémonie de clôture d'un camp d'entraînement de l'équipe Math-Olympique, le coordinateur a déclaré :

« Dans notre équipe olympique, qui compte 35 élèves, quatre groupes de travail sont actifs, chacun se consacrant à l'un des quatre thèmes des olympiades mathématiques : algèbre, combinatoire, géométrie et théorie des nombres. Chaque groupe se réunit une fois par semaine selon le calendrier suivant : le lundi pour le premier groupe, qui compte 20 élèves, le mardi pour le deuxième avec 14 élèves, le mercredi pour le troisième avec 18 élèves et le jeudi pour le quatrième avec 16 élèves. Aucun élève n'est membre de plus de deux groupes, et aucun groupe ne partage plus de cinq élèves avec un autre groupe. »

Le coordinateur s'est-il trompé ?

Corrigé

Réponse : Le coordinateur s'est trompé.

Barème :	
Une solution complète	25pts
Principe « inclusion-exclusion » (G1 à G4)	5pts
Calcul des cardinaux	5pts
Mise en équation des données	5pts
Réponse	7pts
Idées et présentation	2pts

Justification :

Notons G_1, G_2, G_3, G_4 les quatre groupes d'élèves.

On sait que :

$$|G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4| = |G_1| + |G_2| + |G_3| + |G_4| - |G_1 \cap G_2| - |G_1 \cap G_3| - |G_1 \cap G_4| - |G_2 \cap G_3| - |G_2 \cap G_4| - |G_3 \cap G_4|$$

car « *aucun élève ne participe à plus de deux groupes* » implique que toutes les intersections de trois groupes ou de quatre groupes sont vides.

On a aussi $|G_1 \cap G_2| + |G_1 \cap G_3| + |G_1 \cap G_4| + |G_2 \cap G_3| + |G_2 \cap G_4| + |G_3 \cap G_4| \leq 5 \times 6 = 30$ car *« aucun groupe n'a plus de cinq élèves en commun avec un autre groupe »*

D'après les données : $|G_1| + |G_2| + |G_3| + |G_4| = 68$

Ce qui implique que $|G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4| \geq 38$.

Contradiction avec les données car $|G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4| = 35$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des deux équations suivantes :

1. $(x+y)^2 = (x+1)(y-1)$
2. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c-2} + \sqrt{u} + \sqrt{v} = a+b+c+u+v$

Corrigé

Barème :	
Une solution complète	25pts
1° $(a+b)^2 - ab = 0$	4pts
Somme des carrés	4pts
Résultat	3pts
2° écriture $x - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$	4pts
Somme des carrés	4pts
Résultat	3pts
Idées et présentation	3pts

1. On a $x+y = (x+1)+(y-1)$. Notons $a = x+1$ et $b = y-1$ Donc l'équation s'écrit

$$(a+b)^2 - ab = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[a^2 + b^2 + (a+b)^2\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow a^2 = b^2 = (a+b)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = b = 0$$

L'équation admet donc un unique couple (x,y) solution avec $x = -1$ et $y = 1$.

2. L'équation $\sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c-2} + \sqrt{u} + \sqrt{v} = a+b+c+u+v$ peut s'écrit encore sous la forme $\left(a-\sqrt{a}\right) + \left(b-\sqrt{b}\right) + \left(c-2\sqrt{c-2}\right) + \left(u-\sqrt{u}\right) + \left(v-\sqrt{v}\right) = 0$.

Or $a-\sqrt{a}=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{a}\right)^2-\frac{1}{4}$, de même $b-\sqrt{b}=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b}\right)^2-\frac{1}{4}$, $u-\sqrt{u}=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{u}\right)^2-\frac{1}{4}$,

$v-\sqrt{v}=\left(\frac{1}{2}-\sqrt{v}\right)^2-\frac{1}{4}$ et $c-2\sqrt{c-2}=\left(1-\sqrt{c-2}\right)^2+1$

Alors l'équation s'écrit $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{a}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{u}\right)^2+\left(\frac{1}{2}-\sqrt{v}\right)^2+\left(1-\sqrt{c-2}\right)^2=0$

D'où $\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{u}=\sqrt{v}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=b=u=v=\frac{1}{4}$ et $\sqrt{c-2}=1\Leftrightarrow c=3$

Exercice 3

1. Déterminer tous les entiers relatifs x et y vérifiant l'équation $3x^3+xy-5=0$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels strictement positifs x, y vérifiant cette équation.

Corrigé

1. $3x^3+xy-5=0\Leftrightarrow x(3x^2+y)=5$ donc x et $3x^2+y$ sont des diviseurs de 5 alors $x\in\{1;5;-1;-5\}$

Discutons ces 4 cas

- Si $x=1$ alors $3x^2+y=5\Leftrightarrow y=2$
- Si $x=5$ alors $3x^2+y=1\Leftrightarrow y=-74$
- Si $x=-1$ alors $3x^2+y=-5\Leftrightarrow y=-8$
- Si $x=-5$ alors $3x^2+y=-1\Leftrightarrow y=-76$

Donc l'équation admet 4 couples (x,y) de solutions $(1;2),(5;-74),(-1;-8)$ et $(-5;-76)$.

2. Soit $x=\frac{5}{n}$ et $y=\frac{n^3-75}{n^2}$, $\forall n\geq 5$ (n entier) donc x et y sont des nombres rationnels positifs qui vérifient l'équation et le nombre de couples (x,y) est infini.

Barème :

Une solution complète	25pts
1° $x(3x^2+y)=5$	4pts
Diviseurs de 5	3pts
Discussions des cas	5 pts
Réponse	3pts
Question 2°	7pts
Idées et présentation	3pts

Exercice 4

Soit ABC un triangle rectangle en A et I le centre de son cercle inscrit.
Une droite qui passe par I coupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en P et Q.
Déterminer la valeur minimale du réel $AP\times AQ$

Corrigé

Soient M et N les projetés orthogonaux de I respectivement sur $[AB]$ et $[BC]$ et r le rayon du cercle inscrit au triangle ABC.

On a $IM=IN=r$.

Les triangles PMI et INQ sont semblables car les deux sont rectangles, en plus $\angle IPM=\angle QIN$.

Donc $\frac{MP}{MI}=\frac{NI}{NQ}$, d'où $MP.NQ=MI.IN=r^2$

$$AP\times AQ=(AM+MP)(AN+NQ)$$
$$=AM.AN+AM.NQ+MP.AN+MP.NQ$$

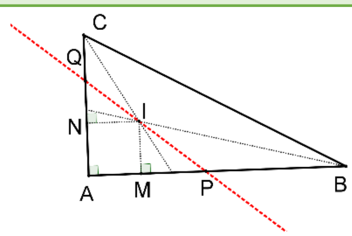
Or AMIN est un carré donc $AN=AM=IM=IN=r$ d'où $AM.AN=r^2$,

Comme $AN=AM=r$ alors $AM.NQ+MP.AN=r(MP+NQ)$.

Or d'après l'inégalité AM-GM on a $MP+NQ\geq 2\sqrt{MP.NQ}=2r$

D'où $AP\times AQ=2r^2+r(MP+NQ)\geq 2r^2+2r^2=4r^2$. Donc

$\boxed{AP\times AQ\geq 4r^2}$



Barème :

Une solution complète	25pts
$IM=IN=r$	4pts
$MP.NQ=MI.IN=r^2$	3pts
$AP\times AQ=(AM+MP)(AN+NQ)$	4pts
$MP+NQ\geq 2\sqrt{MP.NQ}=2r$	4pts
Réponse	3pts
Cas d'égalité	4pts
Idées et présentation	3pts

Selon l'inégalité AM-GM, le cas d'égalité, correspond au cas $MP=NQ\Leftrightarrow AP=AQ$.

Ainsi, le triangle APQ serait un triangle rectangle isocèle. C'est-à-dire $\angle APQ=\angle AQP=45°$.

$\boxed{\text{La valeur minimale de l'expression } AP\times AQ \text{ est donc } 4r^2}$.