DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7C	*Durée : 4h*	*Proposé le 09 Mai 2015 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

1° a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $17x - 7y = -3$.

b) On considère un entier naturel A tel que: $A \equiv 9\,[17]$ et $A \equiv 6\,[7]$. Déterminer les valeurs possibles de A.

c) Déterminer A sachant que $1896 < A < 2134$;

2° a) Pour $1 \le n \le 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) Démontrer que pour tout n, le nombre $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7. En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

c) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{2015} par 7.

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.

3° Soit $u_n = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}$.

a) Montrer que $u_n = \frac{1}{2}\left(3^n - 1\right)$

b) Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7.

c) Déterminer tous les diviseurs de u_6.

Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre O et de côté a, ($a > 0$). Soient I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$

1° a) Faire une figure illustrant les données précédentes que l'on complétera au fur et à mesure. (On pourra prendre la droite (AB) horizontale)

b) Montrer qu'il existe une unique rotation r_1 qui transforme A en B et C en A.

c) Déterminer un angle de r_1 et préciser son centre.

2° On considère la rotation r_2 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer $r_1 o r_2(B)$ et caractériser $r_1 o r_2$.

3° On considère les points D et E symétriques respectifs de I par rapport à J et K.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en K et J en E.

b) Justifier que g est une symétrie glissante. Déterminer $g(D)$ et donner la forme réduite de g.

4° a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe s_1 qui transforme B en I et C en J.

b) Déterminer le rapport et un angle de s_1. Justifier que O est le centre de s_1.

5° Soit s_2 la similitude directe qui transforme C en J et K en A.

a) Donner un angle et le rapport de s_2.

b) Déterminer le centre de s_2.

c) Déterminer $s_2 \circ s_1(A)$. Caractériser $s_2 \circ s_1$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

On désigne par E et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (BC)

1° a) Soit r la rotation définie par $r(B) = C$ et $r(C) = D$. Préciser l'angle et le centre de r.

b) Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$. Déterminer $f(C)$ et $f(A)$ puis caractériser f.

2° On désigne par g l'antidéplacement défini par $g(D)=B$ et $g(O)=O_1$. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

3°) Soit S la similitude directe telle que $S(A)=B$ et $S(E)=C$

a) Déterminer l'angle et le rapport de S. Construire son centre Ω.

b) Déterminer $r^{-1}\circ S(A)$, puis montrer que $r^{-1}\circ S$ est une homothétie que l'on caractérisera.

c) Montrer que $S((CE))=(CA)$, en déduire que $S(C)=O$.

d) Montrer que Ω , O et E sont alignés.

4°) Soit S' la similitude directe de centre C, qui transforme B en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S'.

b) Déterminer $S'\circ S'\circ S(E)$ puis caractériser $S'\circ S'\circ S$.

Exercice 4 (7 points)

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{1}{x^2}+1-4\ln x$.

1° a) Dresser le tableau de variation de g.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α et que $1.4<\alpha<1.5$.

c) En déduire le signe de $g(x)$.

2° On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x)=\frac{xg(x)}{\left(1+x^2\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3° a) Donner une équation de la tangente (T) à la courbe C_f en son point d'abscisse 1.

b) Montrer que pour tout $x>0$, $\ln x\le x-1$. En déduire que : $f(x)-\frac{1}{4}(x-1)\le(x-1)\left[\frac{4-\left(1+x^2\right)^2}{4\left(1+x^2\right)^2}\right]$.

c) Déterminer la position relative de C_f et (T) (on pourra distinguer les cas $x\le 1$ et $x>1$).

d) Tracer (T) et C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On prendra $\alpha=1.45$ et $f(\alpha)=0.04$.

4° Pour $x>0$, on pose $F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{x}f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $F'(x)=\frac{\left(1-x^2\right)\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

b) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=\tan x$. Montrer que h est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable $[0,+\infty[$ et que : $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

d) Montrer que pour tout $x>0$: $F(x)=\frac{1}{2}\left[h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)-h^{-1}(x)\right]+\frac{x\ln x}{1+x^2}$

e) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+}F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}F(x)$. Dresser le tableau de variation de F .

f) Soit G la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $G(x)=F(x)$ si $x>0$, $G(0)=\frac{\pi}{4}$. Montrer que G est un prolongement continu de F en 0 et donner l'allure de la courbe Γ de G.

Fin.