Bac Blanc — Epreuve de Maths

Niveau : 7D — *Durée :4h* — *Proposée le 28 décembre 2018 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, sans justification, la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses a	b	c	d
1	Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z, alors on a	$z^2<0$	$\bar{z}=z$	$z\bar{z}=i$	$\|z-i\|=\|z\|+1$
2	Si $z=-\sqrt{3}+2e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$2\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{6}}$	$\left(2-\sqrt{3}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$
3	Si z est un nombre complexe tel que $\|z\|=1$, alors on a toujours	$\|z-1\|=0$	$\bar{z}=\frac{1}{z}$	$\|z\|^2=1$	$z=1$ ou -1
4	$\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2019}=$	1	i	–1	2019

Exercice 2(3 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie pour tout $n>0$ par: $U_1=1;\quad U_{n+1}=\frac{U_n}{5U_n+1}$.

1) Calculer U_2, U_3.

2) Pour tout $n>0$ on pose $V_n=\frac{1}{U_n}$.

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique. Ecrire V_n puis U_n en fonction de n.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

c) Calculer en fonction de n : $S_n=V_1+V_2+\cdots+V_n$.

Exercice 3 (5 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{3n}{n+1}u_n+\frac{4}{n+1}$

1.a) Vérifier que $u_2=\frac{7}{2}$ et $u_3=\frac{25}{3}$.

b) Justifier que la suite (u_n) n'est in arithmétique, ni géométrique.

c) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$

d) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n\geq 1$ par : $v_n=nu_n+2$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

c) Montrer que pour tout entier $n\geq 1$: $u_n=\frac{3^n-2}{n}$.

3) Soit $S_n=u_1+2u_2+3u_3+...+nu_n$.

A l'aide de v_n, exprimer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 4 (8 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 - 2iz + 2 + 4i = 0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 4iz^2 + (-2+4i)z + 8 - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = (1+i)^2$, $z_B = \dfrac{7+i}{3+4i}$ et $z_C = \dfrac{1+7i}{2-i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A, z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z \neq -1+3i$ par $f(z) = \dfrac{(1+i)z - 2}{z+1-3i}$

Montrer que pour tout $z \neq -1+3i$, on a : $f(z) = (1+i)\dfrac{z-1+i}{z+1-3i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z)) = \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z)) = \dfrac{3\pi}{4}\ [\pi]$,

d. Γ_4 tel que $|f(z) - 1 - i| = 2\sqrt{10}$

6.a) Calculer le nombre $\alpha = f(-2)$ et l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique

b) Montrer que le nombre α^{2018} est imaginaire pur.

Fin.