DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7D | *Durée :4h* | *Proposé le 21 Février 2016 de 8h à 12h*

EXERCICE 1 (5 POINTS)

A- Soit f une fonction dérivable sur $IR/\{1\}$ de tableau de variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		+	||	-	0	+	
f	-2 ↗		$+\infty$ || $+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

Choisir la bonne réponse :**(la justification n'est pas demandée)**

Proposition	**Choix A**	**Choix B**	**Choix C**
Le domaine de définition de f est:	$IR/\{1\}$	$IR/\{1;3\}$	$]-\infty,1[\cup]1,3[\cup]3,+\infty[$
La fonction f est	paire	impaire	Ni paire ni impaire
La courbe C admet une asymptote d'équation	$x=3$	$x=1$	$y=3x-2$
La courbe C admet une asymptote d'équation	$y=-2$	$y=1$	$x=-2$
Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 3 est :	$y=-2$	$y=3x-2$	$x=-2$
$\lim\limits_{-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=$	$-\infty$	$+\infty$	0
L'équation $f(x)=0$ admet exactement	3 solutions	2 solutions	1 solution
Si $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ alors C admet une branche vers	(Oy)	(Ox)	$y=2x$

B- Sachant que $f(0)=1$ et $f(x)=0 \Rightarrow x=-1$ ou $x=2$ ou $x=4.$ et $\lim\limits_{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ Tracer sa courbe C.

EXERCICE 2 (3 POINTS)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_1=\dfrac{1}{2}$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+1}=\dfrac{n+1}{2n}u_n+\dfrac{n-1}{2n}$

1- Calculer les termes u_2, u_3 et u_4.

2- On définit la suite (v_n) pour tout entier $n\geq 1$ par : $v_n=\dfrac{u_n-1}{n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de (v_n).

EXERCICE 3 (3 POINTS)

On considère les nombres complexes $z_1=\frac{3+i}{1+2i}$, $z_2=\frac{3-i}{1-i}$ et $z_3=(1+i)^2$.

1- Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme algébrique. Et z_1 sous forme trigonométrique.

2- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.

a- Placer les points A, B et C.

b- Déterminer la nature du triangle ABC.

c- Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

3- Soit f l'application définie pour tout $z\neq 2i$ par : $f(z)=\frac{(1+i)z-2}{z-2i}$

Montrer que pour tout $z\neq 2i$, on a : $f(z)=(1+i)\frac{z-1+i}{z-2i}$.

4- Déterminer et représenter, dans le même repère, les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)|=\sqrt{2}$. **b.** Γ_2 tel que $Arg(f(z))=\frac{\pi}{4}\ [\pi]$ **c.** Γ_3 tel que $Arg(f(z))=-\frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

EXERCICE 4 (9 POINTS)

Soit $f(x)=\frac{x^2-x-1}{x-2}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de f, puis déterminer les réels a, b et c tels que

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$$

2° Calculer la dérivée f' de f.

3° Dresser le tableau de variations de f.

4° Donner une équation de la tangente de C à son point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

5° Résoudre l'équation $f(x)=0$. Et interpréter graphiquement ses solutions.

6° **a-** Montrer que C admet deux asymptotes l'une oblique D.

b- Etudier les positions relatives de D par rapport à C.

7° Vérifier que $f(4-x)+f(x)=6$ puis l'interpréter graphiquement.

8° Tracer C avec ses asymptotes.

9° Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation : $x^2-(1+m)x-1+2m=0$.

10° Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=]-\infty,1]$.

a- Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Calculer $(g^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

c- Construire dans un nouveau repère orthonormé les courbes de g et de g^{-1}.

Fin.