Epreuve de maths — 2$^{\text{ème}}$ Bac Blanc

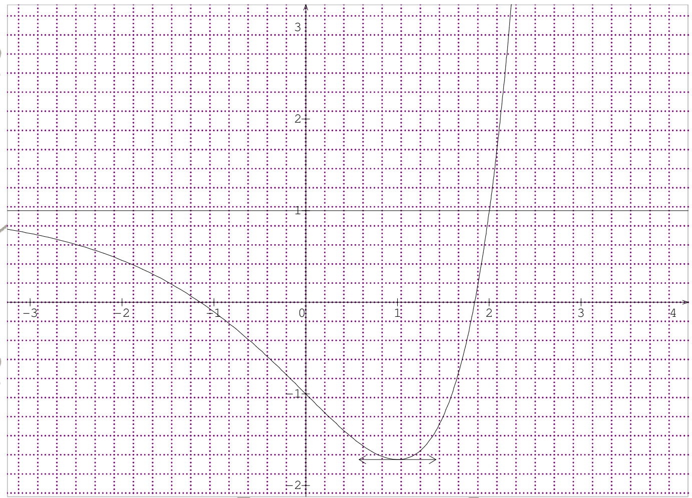
Niveau : 7D — *Durée :4H* — *Proposée le 20 mars 2014 de 8h à 12h*

EXERCICE 1 (3 POINTS)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chaque question, quatre affirmations sont proposées. Une et une seule est exacte. On demande de la préciser.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est horizontale. La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$.

D'après la courbe (C) :



Affirmation …. Réponses	A	B	C	D
1) On a	$f(0)=-1$	$f(0)=1$	$f'(0)=0$	$f(-1)=0$
2) On a:	$f(1)=-2$	$f(-1)=-1$	$f'(1)=e-1$	$f'(1)=0$
3) On a :	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$
4) L'équation $f(x)=0$ admet deux solutions α et β tels que :	$\alpha>2$ et $\beta<-2$	$1<\alpha<2$ et $-2<\beta<-1$	$0<\alpha<1$ et $-2<\beta<-1$	$0<\alpha<1$ et $-1<\beta<0$
5) L'équation $f(x)=-1$ admet exactement :	aucune solution	1 solution	2 solutions	3 solutions
6) $A=\int_0^{\alpha} f(x)dx$ où α est la solution positive de l'équation $f(x)=0$. Alors :	$A=3$	$A<-1$	$A>1$	$2<A<3$

EXERCICE 2(5 POINTS)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2+2i$, $z_B = -2-i$ et $z_C = \dfrac{3-3i}{2}$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 2+2i$ on pose : $f(z) = \dfrac{z+2+i}{z-2-2i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+2i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) Résoudre l'équation $f(z) = i$ et donner sa solution sous forme trigonométrique.

3.a) Placer les points A, B et C dans le plan. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

b) Déterminer et représenter dans le repère précédent le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

4) Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$. **b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.**

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel. **d) Γ_4 tel que $|f(z)-1| = 3$.**

EXERCICE 3 (5 POINTS)

On considère les suites numériques (U_n) et (V_n) définies pour tout n de IN^* par:

$$\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3n+3}{4n} U_n \end{cases} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{1}{n} U_n .$$

1.a) Calculer U_2 , U_3 , V_1 , V_2 .

b) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est positive.

c) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?

2.a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique convergente vers 0.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) On pose $W_n = \ln V_n$, $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \frac{U_3}{3} + \cdots + \frac{U_n}{n}$ et $S_n' = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

b) Calculer S_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

c) Montrer que $S_n' = \frac{n^2 - n}{2} \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$.

EXERCICE 4 (7 POINTS)

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x\ln x - 2, & x > 0 \\ f(0) = -2 \end{cases} .$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.a) Montrer que f est continue à droite de 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$ et interpréter.

c) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ et donner une interprétation graphique.

2.a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f et montrer que la courbe (C) admet au point d'abscisse $x_0 = 1$ une tangente horizontale dont –on donnera une équation.

b) Calculer $f''(x)$ où f'' est la fonction dérivée de f' et en déduire les variation f' et le signe de $f'(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

3.a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[0;+\infty[$ exactement une solution α vérifiant $2,7 < \alpha < 2,8$.

b) Construire la courbe (C).

4. a) Justifier que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f^{-1} réciproque de f .

c) Construire, dans le repère précèdent, la courbe (C') représentative de f^{-1}.

5. a) Utiliser une intégration par parties pour calculer $G(x) = \int_1^x t\ln t dt$.

b) En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

6) Soit A_n l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation respectives $x = \alpha$ et $x = \frac{1}{n}$.

a) Justifier que $A_n = -\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha} f(t)dt$ puis calculer A_n en fonction de α et n .

b) Calculer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$ et donner un encadrement par deux entiers consécutifs de cette limite. Interpréter graphiquement.

Fin.