DEVOIR DE MATHS

Niveau : 7D	*Durée :4h*	*Proposé le 16 Mai 2014 de 8h à 12h*

Exercice 1 (3 points)

Un questionnaire à choix multiples (QCM) comporte 10 questions indépendantes. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule correcte. Un élève répond au hasard à chaque question du QCM. On note X le nombre de réponses correctes qu'il a données. On considère les événements :

A : L'élève a exactement six réponses correctes. **B : L'élève n'a aucune réponse correcte.**

C : L'élève a au moins une réponse correcte. **D : L'élève a toutes les réponses correctes.**

Parmi les réponses proposées pour chaque question ci-après, une seule réponse est exacte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C
1	L'ensemble de valeurs de X est :	$\{1,2,...,10\}$	$\{0,1,...,4\}$	$\{0,1,2,...,10\}$
2	La probabilité de l'événement A est :	$\frac{1}{4}$	$C_{10}^4\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4$	$C_6^4\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4$
3	La probabilité de l'événement B est :	$\left(\frac{3}{4}\right)^6$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^6$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
4	La probabilité de l'événement C est :	$1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^9$
5	La probabilité de l'événement D est :	$\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$	$1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$
6	Le nombre de réponses correctes de l'élève, que l'on peut espérer est :	3	4	5

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.

Question n°	1	2	3	4	5	6
Réponse						

Exercice 2 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombre complexe l'équation : $z^2-4z+13=0$ et soient z_1 et z_2 ses solutions telles que $\mathrm{Im}(z_1)>0$.

2) On considère, dans le plan complexe, les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+z_1$ et $z_B=i+z_2$.

a) Ecrire les nombres $z_A=1+z_1$ et $z_B=i+z_2$ sous formes algébrique et trigonométrique.

b) Représenter, dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A et B. Déterminer la nature du triangle OAB.

c) Déterminer et placer le point C tel que le quadrilatère OACB soit un parallélogramme.

d) Construire l'ensemble des M du plan d'affixe z tel que le complexe $\frac{z-2+2i}{z-3-3i}$ soit imaginaire pur.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+(x-1)e^x$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2+xe^x$.

1) Dresser le tableau de variation de *g*.

2) En déduire le signe de *g* (*x*) pour tout réel *x*.

Partie B : étude et représentation de la fonction *f*

1.a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c) Etudier la position de (C) par rapport à (D).

2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement.

3.a) Calculer f'(x) puis, à l'aide de la partie A, dresser le tableau de variation de *f*.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique x_0 dans $\mathbb{R}$ .Vérifier que $0,4 < x_0 < 0,5$.

4.a) Déterminer les coordonnées du point A de la courbe (C) où la tangente T à la courbe est parallèle à l'asymptote (D). Donner l'équation de T.

b) Tracer (C) , T et (D).

c) Discuter graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-1-me^{-x}=0$.

Exercice 4 (8 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A : On considère la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x\ln x-x+1$ et soit Γ sa courbe.

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2) Etudier les variations de g et préciser le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) On désigne par Γ' la courbe de la fonction $u(x)=\ln x$.

a) Etudier la position relative de Γ et Γ'.

b) Soit g_1 la fonction définie par : $\begin{cases} g_1(x)=x\ln x-x+1 \\ g_1(0)=1 \end{cases}$.

Montrer que g_1 est un prolongement continu de g en 0. Etudier la dérivabilité de g_1 en 0.

c) Soit Γ_1 la courbe de g_1. Tracer les courbes Γ' et Γ_1. (fig :1).

4. a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale : $J=\int_1^e (t-1)\ln t\,dt$.

b) Soit Δ la partie du plan définie par : $\Delta=\left\{M(x,y)/1\le x\le e; g(x)\le y\le \ln x\right\}$. Calculer, en cm^2 l'aire de Δ.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f .(On remarquera que $f'(x)$ s'exprime en fonction de $g(x)$).

2) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une solution unique α et que $3.5<\alpha<3.6$.

3) Soit h la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $h(x)=\ln x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

a) Vérifier que $h(\alpha)=\alpha$.

b) Etudier les variations de h.

c) On pose $I=[3,4]$. Montrer que si $x\in I$ alors $h(x)\in I$ et $|h'(x)|\le\frac{5}{6}$.

4) On définit la suite (u_n) par : $u_0=3$ et $u_{n+1}=h(u_n)$.

a) Vérifier que $\alpha\in I$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{5}{6}|u_n-\alpha|$.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, : $|u_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

c) Montrer que $(u)_n$ est convergente vers α.

Fin.