Bac Blanc — Epreuve de Maths

Niveau : 7C — *Durée :4h* — *Proposée le 26 décembre 2018 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et $I_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. On pose $N=A-I_4$.

1. a) Calculer N.

b) Calculer N^2, N^3.

c) Vérifier que $N^4=O$ où O est la matrice carrée nulle d'ordre 4. (On dit que N est nilpotente).

2. En remarquant que $A=N+I_4$, $N^0=I_4$ et que N et I_4 commutent.

a) Montrer que pour tout entier naturel n ; $A^n=\sum_{k=0}^{3}C_n^kN^k$.

b) En déduire en fonction de n l'expression de A^n.

Exercice 2 (5 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $19x-11y=1$.

1.a) Justifier que (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

b) Vérifier que le couple $(7,12)$ est une solution de (E).

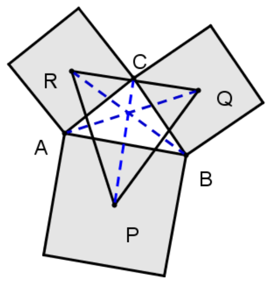
c) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2.a) Soit $n\in\mathbb{Z}$. Montrer que : $\begin{cases}n\equiv 4\,[19]\\ n\equiv 5\,[11]\end{cases}$ si et seulement si $n\equiv 137\,[209]$

b) Quel est le $PGCD(n,209)$?

c) Une marchandise est mise dans des cartons à 19 pièces le dernier carton ne contient que 4 pièces et si elle est mise dans des cartons à 11 pièces le dernier carton ne contient que 5 pièces. Déterminer le nombre de pièces de cette marchandise sachant qu'il est entre 1810 et 2220.

Exercice 3 (5 points)



On considère un triangle ABC direct. On construit à l'extérieur de celui-ci trois carrés, qui s'appuient respectivement sur les côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, de centres respectifs P, Q, R.

On note respectivement a,b,c,p,q,r les affixes des points : A,B,C,P,Q,R dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°a) Démontrer que dans le carré construit sur $[AB]$ on a : $p=\dfrac{a-ib}{1-i}$.

b) Etablir des relations analogues pour q et r en raisonnant dans les deux autres carrés.

c) Montrer que les triangles ABC et PQR ont le même centre de gravité.

2° a) Montrer que les droites (AQ) et (PR) sont perpendiculaires.

b) Montrer que les droites (AQ), (BR) et (PC) sont concourantes.

c) Soit H le point de concours de ces droites. Montrer que l'affixe h de H vérifie :

$$\begin{cases}(r-p)\bar{h}+(\bar{r}-\bar{p})h=(r-p)\bar{a}+(\bar{r}-\bar{p})a\\(q-p)\bar{h}+(\bar{q}-\bar{p})h=(q-p)\bar{b}+(\bar{q}-\bar{p})b\end{cases}$$

3° On considère le polynôme $P(z)=z^3-5z^2+(7-2i)z-7-6i$.

a) Résoudre l'équation $P(z)=0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

b) Soient A, B, C les points d'affixes respectives $a=i, b=1-2i, c=4+i$. Donner, dans ce cas, les affixes des points P, Q, R définis ci-haut.

c) Déterminer alors l'affixe du point H.

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives $-i$ et i.

Soit f l'application de $P\setminus\{A\}$ dans $P\setminus\{B\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z'=\dfrac{iz+1}{z+i}$.

1° Montrer que f est une bijection et donner l'expression de f^{-1}.

2° On suppose $M\neq A$ et $M\neq B$

a) Montrer que $(\vec{u},\overrightarrow{OM'})=\dfrac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})\,[2\pi]$ et que $OM'=\dfrac{MB}{MA}$

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(z)$ tels que : z' soit un réel non nul.

c) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ lorsque M' parcourt le cercle de centre O et rayon 1.

3° Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(iz+1)^3=(z+i)^3$.

a) Montrer que si z est une solution de (E) alors z est réel.

b) Soit $\alpha\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\dfrac{1+i\tan\alpha}{i+\tan\alpha}$.

En déduire les valeurs de α pour lesquelles $\tan\alpha$ est une solution de (E).

c) Résoudre cette équation en utilisant l'identité remarquable $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

d) Déduire la valeur exacte de $\tan\dfrac{5\pi}{12}$.

4° Soit θ un réel de l'intervalle $]0,2\pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$

5° On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=2i-e^{i\theta}$.

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on précisera.

b) Trouver les ensembles décrits par M_1 et M_2 lorsque θ varie.

c) Montrer que $(M_1M_2)^2=8(1-\sin\theta)$. Déterminer la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale.

Fin.