جمعية أصدقاء الرياضيات

ASSOCIATION DES AMIS DE MATHEMATIQUES

Bac Blanc Epreuve de Maths(remplacée)

Niveau : 7C	*Durée :4h*	*Proposée le 26 décembre 2018 de 8h à 12h*

Exercice 1 (4 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_2$ où I_2 est la matrice identité d'ordre 2 .

2) En déduire une expression de A^3 sous la forme $\alpha A + \beta I_2$ où α et β des réels.

3) On considère les suites numériques (r_n) et(s_n) définies par $\begin{cases} r_0 = 0 \text{ et } s_0 = 1 \\ r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$.

a) Calculer r_1 , s_1 ; r_2 , s_2; r_3 et s_3.

b) Vérifier que $A^2 = r_2A + s_2I_2$ et $A^3 = r_3A + s_3I_2$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel n , $A^n = r_nA + s_nI_2$. (On admet que $A^0 = I_2$)

4) Démontrer que la suite (k_n) définie par $k_n = r_n - s_n$ est géométrique de raison -1 .

En déduire l'expression de k_n en fonction de n.

5) On admet que la suite (t_n) définie par $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ est géométrique de raison2.

a) Déduire l'expression de t_n en fonction de n.

b)Déduire des questions précédentes, une expression explicite de $r_n$et s_n en fonction de n

c)En déduire, pour tout entier naturel n non nul, une expression des coefficients de la matrice A^n

Exercice 2(5 points)

On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $17x - 13y = 2$.

1.a) Vérifier que $(7 , 9)$ est une solution particulière de(E).

b) Résoudre (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

c) En déduire les solutions de l'équation (E_1) : $17x - 13y = 4$.

2.a) Soit $q \in \mathbb{Z}$. Montrer que : $\begin{cases} q \equiv 5\ [13] \\ q \equiv 1 [17] \end{cases}$ si et seulement si $q \equiv 18[221]$.

b) Une marchandise est mise dans des cartons à 13 pièces le dernier carton ne contient que 5 pièces et si elle est mise dans des cartons à 17 pièces le dernier carton ne contient qu'une seule pièce (1). Déterminer les nombres possibles de pièces de cette marchandise sachant qu'on a moins de 600 pièces.

3.a) Justifier que $10^{16} \equiv 1[17]$. Enoncer le théorème utilisé.

b) Déterminer suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 10^npar 13.

c) Existe-t-il un entier naturel p tel que $10^p \equiv 18[221]$?

Exercice 3 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (2+6i)z^2 - 11z - 8 + 6i$

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) : $P(z) = 0$.

d) En déduire les solutions de l'équation (E') : $z^6-(2+6i)z^4-11z^2-8+6i=0$ dans $\mathbb{C}$.

2) Soient A, B et C les images des solutions de l'équation $P(z)=0$ avec $|z_A|<|z_B|<|z_C|$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Donner l'expression complexe de la similitude directe s de centre A qui transforme C en B.

c) Déterminer le rapport de s.

d) Soit θ un angle de s. Montrer que $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$ et $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

3) On considère l'application f qui à tout point d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{3+i}{8}z+\frac{-5+i}{8}$.

Soit **le point $M_0(3,4)$, et pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on pose $M_{n+1}=f(M_n)$. Soit z_n l'affixe du point M_n.**

a) Vérifier, en utilisant l'expression de f, que l'affixe du point $M_1=f(M_0)$ est 2i.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $z_n=-1+\left(\frac{3+i}{8}\right)^n(4+4i)$.

c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=M_0M_1+M_1M_2+...+M_{n-1}M_n$. Exprimer S_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

<u>Exercice 4 (6 points)</u>

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-2iz-4(1-i)=0$.

2) Soit $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $E(\theta)$ l'équation : $z^2-2ize^{i\theta}-4(1-i)e^{2i\theta}=0$.

a) Résoudre $E(\theta)$, on note z' et z'' les solutions telles que $|z'|>|z''|$.

b) Mettre sous forme exponentielle le nombre z''.

3) On considère les points M', M'' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $-2(1-i)e^{i\theta}$ et le point N image de M' par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que pour tout réel $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, le point M' appartient à un cercle Γ que l'on précisera.

b) Déterminer l'affixe du point N en fonction de θ.

c) Montrer que OM'NM'' est un parallélogramme.

d) En déduire un programme de construction du point M'' à partir d'une position donnée de M' sur Γ. Placer les points N et M''.

4) On considère l'équation $E'(\theta)$: $(z\sqrt{2}-1)^3=(-2+2i)e^{i\theta}z^3$.

a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $V=(-2+2i)e^{i\theta}$.

b) Soit $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On pose $\frac{z\sqrt{2}-1}{z}=\sqrt{2}e^{ix}$. Montrer que $z=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+i\cot\frac{x}{2}\right)$. En déduire les solutions de l'équation $E'(\theta)$.

Fin.